



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El estudiante debe indicar claramente en la primera página del tríptico, cuáles han sido las preguntas elegidas.

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera:

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX = b$ según los valores del parámetro a

b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a = 1$

SOLUCIÓN

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{pmatrix}$.

El único menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4a + 2a^2 - 6a = 2a^2 - 2a = 2a(a-1) = 0 \Rightarrow a=0, a=1$$

▪ Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$: $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado

▪ Para $a=0$: las matrices de los coeficientes y ampliada son $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

El menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$

Para conocer el rango de la matriz ampliada, orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 6 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } B = 3 \Rightarrow \text{rg } A \neq \text{rg } B \Rightarrow \text{sistema incompatible}$$

- Para $a=1$: las matrices de los coeficientes y ampliada son $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$

El menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2$

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \text{rg} B = 2 \Rightarrow \text{rg} A = \text{rg} B = 2 < n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

b) Ya sabemos que cuando $a=1$ el sistema es compatible indeterminado. Puesto que el menor distinto de 0 que da rango a la matriz de los coeficientes está formado por los coeficientes de x e y en la segunda y tercera ecuación del sistema, utilicemos la incógnita z como parámetro ($z=\lambda$) en el sistema formado por la segunda y la tercera ecuación:

$$\begin{cases} x - 2\lambda = -1 \\ -x + y + 2\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ -x + y = 1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow x = -1 + 2\lambda \Rightarrow y = -1 + 2\lambda + 1 - 2\lambda = 0$$

Las soluciones del sistema para $a=1$ son entonces: $x = -1 + 2\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$

- 2)** Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

SOLUCIÓN

Sea “ x ” el precio de una mascarilla quirúrgica desechable, “ y ” el precio de una mascarilla higiénica y “ z ” el precio de una mascarilla quirúrgica reutilizable. Se tiene:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 0,90 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \\ 20x + \quad + 25z = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2,7 \\ 3x + 2y + z = 5,6 \\ 4x + \quad + 5z = 6,2 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2,7 & 1 & 1 \\ 5,6 & 2 & 1 \\ 6,2 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{27 + 6,2 - 12,4 - 28}{10 + 4 - 8 - 15} = \frac{-7,2}{-9} = 0,8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2,7 & 1 \\ 3 & 5,6 & 1 \\ 4 & 6,2 & 5 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{28 + 18,6 + 10,8 - 22,4 - 40,5 - 6,2}{-9} = \frac{-11,7}{-9} = 1,3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2,7 \\ 3 & 2 & 5,6 \\ 4 & 0 & 6,2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{12,4 + 22,4 - 21,6 - 18,6}{-9} = \frac{-5,4}{-9} = 0,6$$

Así pues, la mascarilla quirúrgica desechable cuesta 0,80 euros, la mascarilla higiénica cuesta 1,30 euros y la mascarilla quirúrgica reutilizable cuesta 0,60 euros.

3) Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN

$$XA + XA^t = B \Leftrightarrow X(A + A^t) = B \Leftrightarrow X = B \cdot (A + A^t)^{-1}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos $(A + A^t)^{-1}$:

$$|A + A^t| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists (A + A^t)^{-1}$$

$$(A + A^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}(*)} \text{Adj}[(A + A^t)^t] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(A + A^t)^{-1}}$$

$$\xrightarrow{(A + A^t)^{-1}} (A + A^t)^{-1} = \frac{\text{Adj}[(A + A^t)^t]}{|A + A^t|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

(*) Cálculo de los adjuntos de los elementos de $(A + A^t)^t$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 ; A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 ; A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 ; A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 ; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 ; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 ; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 ; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Se tiene entonces:
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 4) Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$

SOLUCIÓN

El plano buscado contiene a la recta r , luego contiene a un punto de la recta y a su vector direccional. Busquemos dos puntos de r :

$$r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 4z - 1 \\ 2x + y = z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 4z - 1 \\ -2x - y = -z + 2 \end{cases} \Rightarrow x = 3z + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2x + z - 2 = -6z - 2 + z - 2 = -5z - 4 \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } z=0: x=1, y=-4 \Rightarrow A(1, -4, 0) \\ \text{Para } z=1: x=4, y=-9 \Rightarrow B(4, -9, 1) \end{cases}$$

Tenemos entonces el punto $A(1, -4, 0)$ y el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, -5, 1)$ pertenecientes al plano buscado.

Si el plano que buscamos debe ser perpendicular al plano π , el vector $\vec{n} = (2, -1, 3)$ que es normal al plano π estará contenido en el plano buscado.

El plano determinado por el punto $A(1, -4, 0)$ y los vectores $\vec{u} = (3, -5, 1)$ y $\vec{n} = (2, -1, 3)$ es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 2 \\ y+4 & -5 & -1 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -15x + 15 + 2y + 8 - 3z + 10z - 9y - 36 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow -14x - 7y + 7z - 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - z + 2 = 0$$

- 5) Calcule el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{\text{tg}(x)}}$.

SOLUCIÓN

$L = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{\text{tg}(x)}} = 1^\infty$. Apliquemos logaritmos neperianos a los dos miembros de la igualdad:

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{\text{tg}(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln (1+x)^{\frac{2}{\text{tg}(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\text{tg}(x)} \cdot \ln(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \ln(1+x)}{\text{tg}(x)} \right] = \frac{0}{0} \text{ L'H}$$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{2}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \cos^2 x}{1+x} \right] = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow L = e^2 \quad \text{Es decir: } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{\text{tg}(x)}} = e^2$$

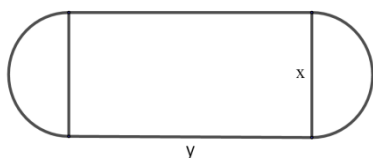
NOTA: cuando aparece la expresión L'H significa que se aplica la regla de L'Hôpital

- 6) Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base y metros y altura x metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)



Su superficie se desea que sea de $4 + \pi \text{ m}^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle x e y de modo que se verifique este requisito.

SOLUCIÓN



La función que debe ser mínima, la longitud total de las líneas es:

$$L = 2x + 2y + 2\pi \frac{x}{2} = (2 + \pi)x + 2y$$

La superficie conocida nos da una relación entre las variables x e y :

$$4 + \pi = xy + \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{4 + \pi - \frac{\pi x^2}{4}}{x} = \frac{16 + 4\pi - \pi x^2}{4x} = \frac{4 + \pi}{x} - \frac{\pi}{4}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = f(x) = (2 + \pi)x + \frac{2(4 + \pi)}{x} - \frac{\pi}{2}x = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x + \frac{2(4 + \pi)}{x} = \frac{4 + \pi}{2}x + \frac{2(4 + \pi)}{x}$$

Estudiamos el valor de x para el que la función es mínima:

$$f'(x) = \frac{4 + \pi}{2} + \frac{-2(4 + \pi)}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{4 + \pi}{2} = \frac{2(4 + \pi)}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{4(4 + \pi)}{4 + \pi} = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \text{ (valores críticos)}$$

De los dos valores críticos, descartamos el valor negativo y comprobamos que $x = 2$ es un mínimo relativo de la función:

$$f''(x) = \frac{2(4 + \pi) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4(4 + \pi)x}{x^4} \Rightarrow f''(2) > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ hace mínima la función. } y = \frac{4 + \pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto: $x = y = 2$ metros.

- 7) Dada la siguiente función: $f(x) = \frac{-x^2}{2} + 2\ln(x+1)$:

a) (0,25 puntos) Calcule el dominio de $f(x)$.

b) (1,75 puntos) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

SOLUCIÓN

a) La función es la suma de una función cuadrática, de dominio $\mathbb{R}$, y de una función logarítmica de dominio: $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow (-1, +\infty)$. El dominio de $f(x)$ es la intersección de ambos dominios, luego: $\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x) = -x + \frac{2}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x+1} = x \Rightarrow 2 = x^2 + x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$$

Como $x = -2$ está fuera del dominio $(-1, +\infty)$, los intervalos de posible cambio en el signo de $f'(x)$ son:

$(-1, 1)$: $f' > 0$ (basta ver el signo de $f'(0)$, por ejemplo) $\Rightarrow$ En $(-1, 1)$ la función es creciente

$(1, +\infty)$: $f' < 0$ (basta ver el signo de $f'(2)$, por ejemplo) $\Rightarrow$ En $(1, +\infty)$ la función es decreciente

8) (2 puntos) Calcule la siguiente integral $\int x^3 e^{x^2} dx$

SOLUCIÓN

Utilizaremos el método de integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int x^3 e^{x^2} dx \stackrel{(1)}{=} \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = x \cdot e^{x^2} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{array} \right| \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C$$

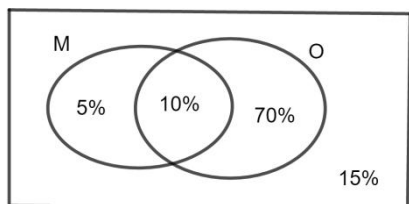
9) En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.

a) (1,25 puntos) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

b) (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

SOLUCIÓN

Sea O el conjunto de todos los estudiantes que utilizan el ordenador y M el conjunto de los estudiantes que utilizan el móvil para seguir las clases online.



Si organizamos los datos de la encuesta en un diagrama de Venn, el 10% estará en la intersección de ambos conjuntos, el 70% utilizará solo el ordenador ($80\% - 10\%$) y el 5% ($15\% - 10\%$) utilizará solo el móvil. Queda un 15% que corresponderá a los que no utilizan ni el ordenador ni el móvil.

a) Directamente, del diagrama de Venn: $p = \frac{85}{100} = 0,85$.

También: $p(O \cup M) = p(O) + p(M) - p(O \cap M) = 0,80 + 0,15 - 0,10 = 0,85$

b) Del diagrama de Venn: $p = \frac{15}{100} = 0,15$.

También: se trata del suceso contrario al del apartado anterior, por tanto: $p = 1 - 0,85 = 0,15$

10) (2 puntos) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

- (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?
- (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?
- (0,5 puntos) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

La distribución normal a la que pertenecen los datos es de media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos, es decir es una $N(30, 5)$. Para utilizar las tablas de la distribución normal $N(0, 1)$ debemos tipificar las variables:

$$\begin{aligned}
 x \in N(\mu, \sigma) & \longleftrightarrow z = \frac{x - \mu}{\sigma} \in N(0, 1) \\
 x = 40 & \longleftrightarrow z = \frac{40 - 30}{5} = 2 \\
 x = 20 & \longleftrightarrow z = \frac{20 - 30}{5} = -2
 \end{aligned}$$

a) $p[x < 40] \longleftrightarrow p[z < 2] = 0,9772$

b) $p[20 < x < 40] \longleftrightarrow p[-2 < z < 2] = p[z < 2] - p[z < -2] = p[z < 2] - p[z > 2] = p[z < 2] - (1 - p[z < 2]) =$
 $= p[z < 2] + p[z < 2] - 1 = 0,9772 + 0,9772 - 1 = 0,9544$

c) $p[x > 40] \longleftrightarrow p[z > 2] = 1 - p[z < 2] = 1 - 0,9772 = 0,0228$