

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

**TIEMPO Y CALIFICACIÓN:** 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

**A.1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Sea  $A$  una matriz de tamaño  $3 \times 4$  tal que sus dos primeras filas son  $(1, 1, 1, 1)$  y  $(1, 2, 3, 4)$ , y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz  $A$  que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

- (0.5 puntos) La tercera fila de  $A$  es combinación lineal de las dos primeras.
- (0.5 puntos) Las tres filas de  $A$  son linealmente independientes.
- (0.5 puntos)  $A$  es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
- (0.5 puntos)  $A$  es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
- (0.5 puntos)  $A$  es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

**A.2. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ , se pide:

- (0.5 puntos) Calcular  $f(0)$  y  $(f \circ f)(0)$ .
- (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de  $f(x)$  en  $x = 1$  y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
- (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

**A.3. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto  $P(3, 3, 0)$  y la recta  $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ , se pide:

- (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto  $P$  y a la recta  $r$ .
- (1 punto) Calcular el punto simétrico de  $P$  respecto de  $r$ .
- (0.75 puntos) Hallar dos puntos  $A$  y  $B$  de  $r$  tales que el triángulo  $ABP$  sea rectángulo, tenga área  $\frac{3}{\sqrt{2}}$  y el ángulo recto en  $A$ .

**A.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . La urna  $A$  contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna  $B$  contiene 3 bolas de cada color y la urna  $C$  contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
- (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
- (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

**B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Se pide:

- (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz  $A$ .
- (0.5 puntos) Calcular la matriz  $C = A^2 - 2I$ .
- (1 punto) Calcular el determinante de la matriz  $D = ABB^t$  (donde  $B^t$  denota la matriz traspuesta de  $B$ ).

**B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión  $P(t) = 25te^{-t^2/4}$ , donde  $t > 0$  es el tiempo de funcionamiento.

- (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
- (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
- (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante  $t$ ,  $E(t)$ , se relaciona con la potencia mediante  $E'(t) = P(t)$ , con  $E(0) = 0$ . Calcular la energía producida por la pila entre el instante  $t = 0$  y el instante  $t = 2$ .

**B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

Del paralelogramo  $ABCD$ , se conocen los vértices consecutivos  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(2, 1, 0)$  y  $C(4, 3, -2)$ . Se pide:

- (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento  $AC$  y es perpendicular a los segmentos  $AC$  y  $BC$ .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice  $D$  y el área del paralelogramo resultante.
- (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ .

**B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.**

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes  $X, Y$ . Sabemos que  $P(X) = 0.4$  y que  $P(X \cap \bar{Y}) = 0.08$  (donde  $\bar{Y}$  es el suceso complementario de  $Y$ ). Se pide:

- (1 punto) Calcular  $P(Y)$ .
- (0.5 puntos) Calcular  $P(X \cup Y)$ .
- (1 punto) Si  $X$  es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede  $X$ , y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

## MATEMÁTICAS II

### CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

**Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.**

---

#### A.1.

En cada apartado, por dar el ejemplo 0.25 puntos; por la justificación de que cada ejemplo cumple el enunciado, 0.25 puntos.

**Estándares evaluables:** Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

#### A.2.

a) Por cada valor obtenido: 0.25 puntos.

b) Por el estudio de la continuidad: 0.5 puntos. Por el estudio de la derivabilidad: 0.5 puntos. Por caracterizar el extremo: 0.25 puntos.

c) Por cada asíntota: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

#### A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

c) Planteamiento: 0.5 puntos. Encontrar una solución correcta: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

#### A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

### B.1.

- la Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

### B.2.

- a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo de límite: 0.25 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo del instante: 0.25 puntos. Cálculo del máximo: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

### B.3.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Si se determina el vértice  $D$ : 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25). Si se determina el área: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25).
- c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

### B.4.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) 0.5 puntos por identificar la binomial; 0.5 puntos por el resultado.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

**MATEMÁTICAS II-SOLUCIONES**  
(Documento de trabajo orientativo)

**A.1.**

- a) Por ejemplo,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$       b) Por ejemplo,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- c) Sirve el ejemplo de b)      d) Sirve el ejemplo de a)
- e) Por ejemplo,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**A.2.**

- a) Evaluando  $f(0) = 1$  y  $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = 1/2$ .
- b) Dado que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(x)$  continua en  $x = 1$ .
- Dado que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{4} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{4x^2} = 0$ ,  $f(x)$  no derivable en  $x = 1$ . En  $x = 1$ ,  $f(x)$  pasa de decreciente a creciente luego en  $x = 1$  hay un mínimo relativo.
- c) Asíntota horizontal  $y=0$  si  $x \rightarrow -\infty$ , asíntota vertical  $x = -1$  y asíntota oblicua  $y = \frac{x}{4}$  si  $x \rightarrow \infty$ .

**A.3.**

- a) La recta  $r$  pasa por el punto  $C(2, 0, -1)$  y tiene vector director  $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ . El plano que nos piden pasa por el punto  $C$  y tiene vectores directores  $\vec{v}$  y  $\vec{CP} = (1, 3, 1)$ . Su ecuación será  $x + y - 4z - 6 = 0$ .
- b) La proyección  $O$  del punto  $P$  sobre la recta  $r$  se halla intersecando  $r$  con el plano de vector normal  $\vec{v}$  que pasa por  $P$ . Dicho plano es  $-x + y = 0$ , y al cortarlo con

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

obtenemos el punto  $O(1, 1, -1)$ . Si  $P'$  es el simétrico a  $P$  respecto de  $r$ , se tiene  $\vec{PO} = \vec{OP}'$ , es decir  $P' = 2O - P = (2, 2, -2) - (3, 3, 0) = (-1, -1, -2)$ .

- c) Si tomamos  $A = O = (1, 1, -1)$ , tendremos que el triángulo  $ABP$  será rectángulo en  $A$ , y su altura será  $|\vec{AP}| = |(2, 2, 1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$ . Por tanto, basta tomar como  $B$  un punto de  $r$  a distancia  $\sqrt{2}$  de  $A$ . Como  $|\vec{v}| = |(1, -1, 0)| = \sqrt{2}$ , una posible solución sería  $B = A + \vec{v} = (0, 2, -1)$  (la otra solución sería  $B' = A - \vec{v} = (2, 0, -1)$ ).

**A.4.**

- a)
- |                                |              |                |
|--------------------------------|--------------|----------------|
| $R \equiv$ primera bola roja.  | $P(A) = 1/3$ | $P(R A) = 2/3$ |
| $N \equiv$ primera bola negra. | $P(B) = 1/3$ | $P(R B) = 1/2$ |
| $A, B, C \equiv$ urna.         | $P(C) = 1/3$ | $P(R C) = 0$   |

$$P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) + P(R|C) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}.$$

- b) Análogamente al apartado anterior,  $P(RN|A) = (4/6)(2/5) = 4/15$ ,  $P(RN|B) = (3/6)(3/5) = 3/10$ ,  $P(RN|C) = 0$ , de modo que

$$P(RN) = P(RN|A) \cdot P(A) + P(RN|B) \cdot P(B) + P(RN|C) \cdot P(C) = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{90}.$$

- c) Basta escribir  $P(N_2|R_1) = \frac{P(RN)}{P(R)} = \frac{17/90}{7/18} = \frac{17}{35}$ .

También puede razonarse de la manera siguiente: Dado que la primera bola es roja, la urna elegida no es la  $C$ . Las probabilidades respectivas de que se trate de la urna  $A$  o de la  $B$  se obtienen mediante el teorema de Bayes:

$$P(A|R) = \frac{P(R|A) \cdot P(A)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}; \quad P(B|R) = \frac{P(R|B) \cdot P(B)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}$$

Si la urna elegida fue la  $A$ , quedan 3 rojas y 2 negras. Si fue la  $B$  quedan 2 rojas y 3 negras. La probabilidad de que la segunda sea negra (sabiendo que la primera fue roja) es, por tanto,  $P(N_2|R_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{17}{35}$ .

**B.1.**

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } |ABB^t| = |A||BB^t|$$

$$BB^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |BB^t| = 0 \rightarrow |ABB^t| = 1 \cdot 0 = 0$$


---

**B.2.**

a) Dado que  $\lim_{x \rightarrow \infty} 25t e^{-t^2/4} = 0$  (por ejemplo, aplicando la Regla de L'Hôpital), la potencia tiende a 0.

b) Como  $P'(t) = \frac{25}{2}(2-t^2)e^{-t^2/4}$ ,  $P(t)$  presenta un extremo en  $t = \sqrt{2}$  pasando de creciente a decreciente luego es un máximo relativo. Así  $P_{max} = P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}e^{-1/2} \approx 21.44$ .

$$\text{c) } E(2) = \int_0^2 P(t) dt = \left[ -50e^{-t^2/4} \right]_0^2 = \boxed{50 - 50/e \approx 31.61}.$$


---

**B.3.**

a) El punto medio de  $AC$  es  $M_{AC}(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2})$ .  $\overrightarrow{AC}(3, 3, -1)$  y  $\overrightarrow{BC}(2, 2, -2)$  y por tanto el vector director de la recta buscada es  $\overrightarrow{d}_r = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = (-4, 4, 0)$  que es paralelo al vector  $(-1, 1, 0)$ . La ecuación vectorial de la recta  $r$

buscada es:  $r : (x, y, z) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}) + \lambda(-1, 1, 0) \Rightarrow$  las ecuaciones implícitas de  $r$  son: 
$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

b) El vértice  $D$  es el simétrico de  $B$  con respecto al punto medio de  $AC \Rightarrow (\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2})$  y por consiguiente, el vértice  $D$  es  $D = A + \overrightarrow{BC} = (3, 2, -3)$ . El área del paralelogramo es:  $A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ .

$$\text{c) } \cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{5}{\sqrt{57}}.$$


---

**B.4.**

a) Al ser  $X$  e  $Y$  independientes, tenemos que

$$0.08 = P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) = P(X) - P(X)P(Y) = 0.4(1 - P(Y)) \Rightarrow 1 - P(Y) = 0.2 \Rightarrow P(Y) = 0.8.$$

$$\text{b) } P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X)P(Y) = 0.8 + 0.4 - 0.32 = 0.88.$$

c) Se trata de 8 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito  $p = P(\overline{X}) = 1 - 0.4 = 0.6$ , y queremos hallar la probabilidad de tener al menos 2 éxitos (llamamos  $n$  al número de éxitos):

$$P(n \geq 2) = 1 - P(n = 0) - P(n = 1) = 1 - \binom{8}{0}0.6^00.4^8 - \binom{8}{1}0.6^10.4^7 = 0.99148032.$$