



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El estudiante debe indicar claramente, cuáles han sido las preguntas elegidas.

Preguntas elegidas (indique un máximo de 5, antes de entregar el examen):

.....

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN

Estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes, A, y el de la matriz ampliada, B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{array} \right)$$

El único menor de orden 3 de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = m-1+m(m+1)+4-2(m+1)(m-1)-2m-1 = m-1+m^2+m+4-2m^2+2-2m-1 =$$

$$= -m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = -2, m = 2$$

· Para $m \neq -2$ y $m \neq 2$: $\text{rg} A = \text{rg} B = 3 = n$ de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado

· Para $m = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

El menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2$

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 2 + 12 + 2 + 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} B = 3 \Rightarrow \text{rg} A \neq \text{rg} B \Rightarrow \text{sistema incompatible}$$

· Para $m=2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right)$

El menor de orden 2 de la matriz de los coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2$

Orlamos este menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 6 - 8 + 3 - 1 = 0 \Rightarrow \text{rg} B = 2 \Rightarrow \text{rg} A = \text{rg} B = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) (1 punto) Calcule, si es posible, $(A \cdot B^t)^{-1}$.

b) (1 punto) Compruebe que, $C^3 = I$, donde I es la matriz identidad, y calcule C^{16} .

SOLUCIÓN

a) $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $|A \cdot B^t| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists (A \cdot B^t)^{-1}$

$$(A \cdot B^t) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (A \cdot B^t)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}} \text{Adj}(A \cdot B^t)^t = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$\xrightarrow{\text{Inversa}} (A \cdot B^t)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Comprobamos que es, en efecto, la matriz inversa: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$C^4 = C^3 \cdot C = I \cdot C = C \Rightarrow$ Las sucesivas potencias de C forman ciclos de tres resultados: C, C^2 e I.

C^{16} es el primer resultado del sexto ciclo. Por tanto: $C^{16} = C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Resuelva el sistema matricial
$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2X + 4Y = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{sumando: } 7Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X = 2Y + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Se considera la recta
$$r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

- a) (1,25 puntos) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto (0,0,1).
- b) (0,75 puntos) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, 1, 1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

SOLUCIÓN

- a) La ecuación del haz de planos que contienen a la recta r es: $x + z - 1 + \lambda(2x + y - 3) = 0$

El plano que buscamos debe contener al punto (0,0,1):

$$0 + 1 - 1 + \lambda(0 + 0 - 3) = 0 \Rightarrow -3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \text{el plano buscado es: } x + z - 1 = 0$$

- b) El producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se define así: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ donde $\cdot$ simboliza el producto escalar y $\times$ el producto vectorial. El producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo que tiene a los tres vectores como aristas. Por otra parte, el producto mixto es independiente del orden de los tres vectores.

Tenemos: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}] = [\vec{u} \times \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (-1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3$

5) Calcule el siguiente límite:.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((1+x - \operatorname{sen} x)^{1/x^3})$$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((1+x - \operatorname{sen} x)^{1/x^3}) = 1^\infty$$

Se tiene: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow a} [g(x) \cdot (f(x)-1)]}$

En nuestro caso: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [g(x) \cdot (f(x)-1)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x^3} \cdot (1+x - \operatorname{sen} x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{3x^2} =$

$$= \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1+x - \operatorname{sen} x)^{1/x^3}) = e^{1/6}$$

NOTA: cuando aparece la expresión L'H significa que se aplica la regla de L'Hôpital

6) Se considera la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2}{1 - e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.

SOLUCIÓN

· Asíntotas verticales: $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

En nuestro caso, $f(x)$ es una función racional que puede tender a ∞ en los valores de x que anulen al denominador: $1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ no es una asíntota vertical de la función.}$$

La función no tiene asíntotas verticales.

· Asíntotas horizontales: $y = a$ es una asíntota horizontal de $f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$

La función $f(x)$ contiene una función exponencial que hace necesario diferenciar el signo de las tendencias de x a infinito, pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty$.

En nuestro caso:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal de la función cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{\infty}{1} = \infty \Rightarrow \text{la función no tiene asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty$$

· Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$ donde $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$

Cuando $x \rightarrow -\infty$: $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{1-e^{-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(1-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0 \Rightarrow$ se trata de la asíntota horizontal ya obtenida.

Cuando $x \rightarrow +\infty$: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{1-e^{-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(1-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{\infty}{1} = \infty \Rightarrow$ la función no tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

7) Se considera la siguiente función $f(x) = \ln(2x+1)$

a) (1,25 puntos) Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) (0,75 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$

SOLUCIÓN

a) · Se trata de una función logarítmica. Su dominio son los valores de x para los que $2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

Es decir: $\text{Dom}(f) = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

· Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$f'(x) = \frac{2}{2x+1}$ • En su dominio, para $x > -\frac{1}{2}$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente

b) El punto de tangencia es: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \ln 2\right)$

Y la pendiente de la tangente: $f'(x) = \frac{2}{2x+1} \Rightarrow m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2} = 1$

La ecuación de la tangente es entonces: $y - \ln 2 = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \ln 2 - \frac{1}{2}$

8) Calcule la siguiente integral: $\int (\sqrt{x} \cdot \ln^2 x) dx$.

SOLUCIÓN

Utilizaremos el método de integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$$\int (\sqrt{x} \cdot \ln^2 x) dx \stackrel{(1)}{=} \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv = \sqrt{x} dx \Rightarrow v = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \end{array} \right| \stackrel{(1)}{=} \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \ln^2 x - \int \frac{2}{3} x \sqrt{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} \cdot \ln^2 x - \frac{4}{3} \int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx \stackrel{(2)}{=} \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \sqrt{x} \, dx \Rightarrow v = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \end{array} \right| \stackrel{(2)}{=} \\
\stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} x \sqrt{x} \cdot \ln^2 x - \frac{4}{3} \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \cdot \ln x - \int \frac{2}{3} x \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx \right] = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \cdot \ln^2 x - \frac{8}{9} x \sqrt{x} \cdot \ln x + \frac{8}{9} \int \sqrt{x} \, dx = \\
= \frac{2}{3} x \sqrt{x} \cdot \ln^2 x - \frac{8}{9} x \sqrt{x} \cdot \ln x + \frac{16}{27} x \sqrt{x} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C$$

9) Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

- (0,75 puntos) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?
- (0,75 puntos) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?
- (0,5 puntos) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

SOLUCIÓN

Las personas a las que hace referencia la estadística tienen dos caracteres: el sexo (varón (V) / mujer (M)) y su situación laboral (en paro (P) / trabaja (T)). Organicemos los datos en una tabla de contingencia partiendo de un total de 100 personas (aunque algunos elementos no sean enteros):

En primer lugar tenemos que el total de varones es de 64 (64% de 100) y el de mujeres 36 (36% de 100).

	V	M	TOTAL
P	7,68	5,76	13,44
T	56,32	30,24	86,56
TOTAL	64	36	100

Del total de varones (64) está en paro un 12%: $64 \cdot 0,12 = 7,68$ y del total de mujeres (36) está en paro un 16%: $36 \cdot 0,16 = 5,76$.

El resto de las celdas se rellenan por restas y sumas.

- a) Del total de personas (100) hay 5,76 con la doble condición de ser mujer y estar en paro. Por tanto:

$$p(M \cap P) = \frac{5,76}{100} = 0,0576$$

- b) Se elige una persona entre las 100 posibles y de ellas hay un total de 13,44 en paro.

$$p(P) = \frac{13,44}{100} = 0,1344$$

- c) Ahora sabemos que la persona contactada está entre las 13,44 que están en paro. De ellas hay 5,76 mujeres:

$$p(M/P) = \frac{5,76}{13,44} = 0,4286$$

10) De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

- a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).
- b) (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

SOLUCIÓN

Estamos ante una situación dicotómica que da lugar a una distribución binomial $B(n, p)$ en la que la

probabilidad de tener x "éxitos" es: $P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

La probabilidad de que un estudiante abandone sus estudios es $p = \frac{1}{5} = 0,2$ y $q = 0,8$ la probabilidad de que no lo haga. Puesto que se seleccionan 5 estudiantes la distribución binomial es $B(5, 0,2)$.

a) $P(X=1) + P(X=0) = \binom{5}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 + \binom{5}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 + 0,8^5 = 0,32768 + 0,262144 = 0,5898$

b) $P(X=5) = \binom{5}{5} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0,2^5 = 0,00032$ $P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,8^5 = 0,32768$

Es más probable que ninguno abandone sus estudios.

NOTA: En este apartado b) no es necesario considerar el cálculo de probabilidades como en una distribución binomial. Conocida la probabilidad de que uno abandone sus estudios (0,2) y la de que no los abandone (0,8):

La probabilidad de que los 5 abandonen sus estudios es: $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,2^5 = 0,00032$

La probabilidad de que los 5 no abandonen sus estudios es: $0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,8^5 = 0,32768$