



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 5 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{6}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua.
b) (1 punto) Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = e$ sea $6 u^2$.

SOLUCIÓN

a) Para $x \in (-\infty, 1)$, la función es continua por tratarse de una función polinómica $f(x) = 5 - ax^2$.

Para $x \in (1, +\infty)$, la función es continua por tratarse de un cociente entre dos funciones continuas que solo es discontinua en $x = 0$, fuera del intervalo aludido.

Estudiemos la continuidad en $x = 1$:

Para que la función sea continua en $x = 1$, debe ser: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (5 - ax^2) = 5 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{ax} = \frac{6}{a} \end{aligned} \right| \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 5 - a = \frac{6}{a} \Rightarrow 5a - a^2 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

b) En el intervalo $(0, 1)$ la función $f(x) = 5 - ax^2$ es continua y positiva para cualquiera de los valores de a en discusión ($a = 2$ ó $a = 3$). Lo mismo ocurre con la función $f(x) = \frac{6}{ax}$ en el intervalo $(1, e)$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^e f(x) dx &= \int_0^1 (5 - ax^2) dx + \int_1^e \frac{6}{ax} dx = \left[5x - \frac{ax^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{6}{a} \ln x \right]_1^e = \left[\left(5 - \frac{a}{3} \right) - 0 \right] + \left[\frac{6}{a} - 0 \right] = \\ &= \frac{15a - a^2 + 18}{3a} = 6 \Rightarrow a^2 + 3a - 18 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2} = \begin{cases} -6 \\ 3 \end{cases} \end{aligned}$$

luego se trata del valor $a = 3$.

2) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

SOLUCIÓN

$$\text{Sea } L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = 1^\infty$$

Apliquemos logaritmos neperianos a los dos miembros:

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(1-x)^2} \cdot \ln \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right)}{(1-x)^2} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\cos \frac{\pi}{2} x \cdot \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2} x}}{-2(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \cot g \frac{\pi}{2} x}{-2+2x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \frac{\pi}{2} x} \cdot \frac{\pi}{2}}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} x} = \frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2} = -\frac{\pi^2}{8} \Rightarrow L = e^{-\frac{\pi^2}{8}} \end{aligned}$$

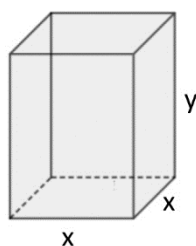
NOTA: cuando aparece L'H significa que se aplica la regla de L'Hôpital

También podríamos haberlo resuelto así:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\sin \frac{\pi}{2} x - 1 \right] \cdot \frac{1}{(1-x)^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x - 1}{(1-x)^2}} \stackrel{L'H}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x \cdot \frac{\pi}{2}}{-2(1-x)}} \stackrel{L'H}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{2} x \right) \cdot \frac{\pi}{2}}{2}} = e^{-\frac{\pi^2}{8}}$$

- 3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3 . El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2 , mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2 . Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

SOLUCIÓN



Sea x la arista de la base e y la arista lateral del prisma.

La superficie lateral más la superficie de la base es: $4xy + x^2$

La función que debe ser mínima es el coste de fabricación del depósito:

$$C = 70 \cdot 4xy + 140 \cdot x^2 = 280xy + 140x^2$$

que depende, en principio, de dos variables. El dato de la capacidad del depósito nos

ofrece una relación entre ambas variables: $x^2 y = 64 \Rightarrow y = \frac{64}{x^2}$

La función "coste", ahora dependiente de una sola variable, es: $C(x) = 280x \cdot \frac{64}{x^2} + 140x^2 = \frac{17920}{x} + 140x^2$

Estudiamos para qué valor de x la función es mínima:

$$C'(x) = \frac{-17920}{x^2} + 280x = \frac{-17920 + 280x^3}{x^2} = 0 \Rightarrow 280x^3 = 17920 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{17920}{280}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Comprobemos que $x=4$ es un mínimo relativo de la función:

$$C''(x) = \frac{840x^2 \cdot x^2 - (-17920 + 280x^3) \cdot 2x}{x^4} \Rightarrow C''(4) > 0 \Rightarrow \text{la función es mínima en } x=4.$$

Así pues, las dimensiones del depósito deben ser: Arista de la base: 4 m. Arista lateral: $y = \frac{64}{16} = 4$ m. es decir, un cubo de 4 m de arista.

4) Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{e^x}{x^3 - x}$$

- a) (1,25 puntos) Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.
b) (0,75 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

SOLUCIÓN

a) ▪ Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{e^{-\infty}}{(-\infty)^3} = \frac{0}{-\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty \Rightarrow \text{no tiene asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty$$

▪ Asíntotas verticales: $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$

Las tres son asíntotas verticales de la función pues:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{e^{-1}}{0} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{1}{0} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{x^3 - x} = \frac{e}{0} = \infty$$

Posición relativa de la curva respecto a las asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x}{x(x^2 - 1)} = \frac{+}{- \cdot +} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x}{x(x^2 - 1)} = \frac{+}{- \cdot -} = +\infty$$

Luego la curva tiende a $-\infty$ a la izquierda de $x = -1$ y a $+\infty$ a la derecha de $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x(x^2 - 1)} = \frac{+}{- \cdot -} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x(x^2 - 1)} = \frac{+}{+ \cdot -} = -\infty$$

Luego la curva tiende a $+\infty$ a la izquierda de $x = 0$ y a $-\infty$ a la derecha de $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x(x^2 - 1)} = \frac{+}{+ \cdot -} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x(x^2 - 1)} = \frac{+}{+ \cdot +} = +\infty$$

Luego la curva tiende a $-\infty$ a la izquierda de $x = 1$ y a $+\infty$ a la derecha de $x = 1$.

▪ Asíntotas oblicuas $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{x^3 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{0}{+\infty} = 0 \Rightarrow \text{es la asíntota horizontal } y = 0$$

$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x^3 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^4 - x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ pues la función exponencial del numerador crece más rápidamente que la polinómica del denominador $\Rightarrow$ la función no tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

b) La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es:

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ donde } y_0 = f(x_0).$$

En nuestro caso: $x_0 = 2$; $y_0 = \frac{e^2}{6}$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (x^3 - x) - e^x \cdot (3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} = \frac{e^x \cdot (x^3 - 3x^2 - x + 1)}{(x^3 - x)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-5e^2}{36}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = \frac{e^2}{6} - \frac{5e^2}{36}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{5e^2}{36}x + \frac{16e^2}{36} \Leftrightarrow y = -\frac{5e^2}{36}x + \frac{4e^2}{9}$$

5) Dada la siguiente matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Estudie el rango de la matriz $A = I + P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Para $k = 1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

SOLUCIÓN

$$\text{a)} \quad A = I + P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

El mayor menor es de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} = 1-k-k-2k-1+k-2k^2-1=0 \Leftrightarrow -2k^2-3k-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} = \frac{3 \pm 1}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ -1 \end{cases}$$

▪ Para $k \neq -\frac{1}{2}$ y $k \neq -1$: $\text{rg } A = 3$

▪ Para $k = -\frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$

▪ Para $k=-1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A=2$

a) Para $k=1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1-2-1-2 = -6 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(*) \text{ Matriz adjunta}} (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz traspuesta}} (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz inversa}}$$

$$\xrightarrow{\text{Matriz inversa}} A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 ; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 ; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 ; A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 ; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 ; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 ; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 ; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

6) Dadas las siguientes matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

b) (1 punto) Calcule la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial: $I + BX = C_1 C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

SOLUCIÓN

a) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+1+1+1-1-3 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(*) \text{ Adjunta}} (B_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (B_{ij})^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}}$$

$$B^{-1} = \frac{(B_{ij})^T}{|B|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 ; B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 ; B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 ; B_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 ; B_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 ;$$

$$B_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 ; B_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 ; B_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 ; B_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

b) $I + BX = C_1 C_2 \Rightarrow BX = C_1 C_2 - I \Rightarrow X = B^{-1}(C_1 C_2 - I)$

$$C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 C_2 - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces:

$$X = B^{-1} \cdot (C_1 C_2 - I) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -7/2 & 5/2 & -1 \\ -5/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

b) (1 punto) Resuelva el sistema para $a = 0$.

SOLUCIÓN

a) Sea A la matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$ y M la matriz ampliada: $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix}$

El mayor menor de A es su propio determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a - 10 - 2 - 16 + a + 15 = 13a - 13 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Tenemos:

• Para $\forall a \neq 1$: $\text{rg} A = \text{rg} M = 3 = n^\circ$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

• Para $a = 1$: $\text{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$

Para calcular el rango de M, orlamos el menor anterior con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 5 - 6 - 8 - 2 + 45 = 0 \Rightarrow \text{rg} M = 2 \Rightarrow \text{rg} A = \text{rg} M = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-30 + 2 + 16 + 5}{-10 - 2 - 16 + 15} = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-4+2-12+6}{-10-2-16+15} = \frac{-8}{-13} = \frac{8}{13}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-24-5-6-8+45-2}{-10-2-16+15} = \frac{0}{-13} = 0$$

- 8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2, 0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $(1, 0, 1)$, $(3, 1, 0)$ y $(2, -1, 1)$. Exprésela como intersección de dos planos.

SOLUCIÓN

El plano determinado por los puntos $A(1,0,1)$, $B(3,1,0)$ y $C(2,-1,1)$ contiene a los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (2, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{v} = (1, -1, 0)$.

El vector $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular al plano y, por tanto, direccional de la recta:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{i} = (-1, -1, -3)$$

Así pues, la recta está determinada por el punto $(1, -2, 0)$ y el vector direccional $\vec{n} = (-1, -1, -3)$:

$$\text{La ecuación continua es } \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1 = -y-2 \\ -3x+3 = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$$

- 9) En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 correspondían a coches eléctricos.
- (0,8 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.
 - (1,2 puntos) Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

SOLUCIÓN

Organizamos los datos en una tabla de doble entrada.

El total de coches revisados son: 85 eléctricos y 145 híbridos. En total: 230 coches.

43 de los 230 coches revisados tienen el software defectuoso luego $230 - 43 = 187$ lo tienen correcto.

De los 43 coches defectuosos 12 son eléctricos, luego 31 son híbridos. Por último, completamos la tabla con $85 - 12 = 73$ coches eléctricos no defectuosos y $145 - 31 = 114$ coches híbridos no defectuosos.

La tabla de contingencia queda así:

	Eléctricos (E)	Híbridos (H)	TOTALES
Defectuoso (D)	12	31	43
No defectuoso ($\bar{D}$)	73	114	187
TOTALES	85	145	230

- a) Del total de 230 coches revisados, hay 114 híbridos con el software del motor correcto:

$$p(H \cap \bar{D}) = \frac{114}{230} = 0,4957$$

- b) Entre los 145 coches híbridos hay 31 con el software del motor defectuoso:

$$p(D/H) = \frac{31}{145} = 0,2138$$

- 10) Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

- a) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?
b) (1,2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

SOLUCIÓN

Se trata de una experiencia dicotómica (es elegido / no es elegido). La probabilidad de que un deportista de la selección española de gimnasia deportiva sea elegido para las próximas olimpiadas

(éxito) es $p = \frac{1}{7}$ y la probabilidad de su contrario (no es elegido) es $q = \frac{6}{7}$.

Como se eligen aleatoriamente 9 deportistas, estamos ante una distribución binomial $B\left(9, \frac{1}{7}\right)$.

a) $p[x=2] = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 = \frac{9!}{2!7!} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0,2497$

- b) El suceso B = “alguno de los 9 deportistas es elegido” es el suceso contrario a “ninguno de los 9 deportistas es elegido”

$$p[x=0] = \binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 0,2497 \Rightarrow p(B) = 0,7503$$