



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + bx + 2 & x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{ax} & x > 0 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$$

- a) (1 punto) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$, y determine el tipo de extremo que es.

SOLUCIÓN

a) Para $x \in (-\infty, 0)$, la función es continua por tratarse de una función polinómica $f(x) = x^3 + bx + 2$.

Para $x \in (0, +\infty)$, la función es continua por tratarse de un cociente entre dos funciones continuas que solo es discontinua en $x = 0$, fuera del intervalo aludido.

Estudiemos la continuidad en $x = 0$:

Para que la función sea continua en $x = 0$, debe ser: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + bx + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{ax} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Nota: L'H significa que se aplica la regla de L'Hôpital.

Como, además $f(0) = 2$, la función es continua para $a = \frac{1}{2}$ y $\forall b \in \mathbb{R}$

b) La función definida en $x = -1$ es: $f(x) = x^3 + bx + 2$. Si esta función tiene un extremo relativo en $x = -1$, debe ser $f'(-1) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 + b \Rightarrow f'(-1) = 3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

Para estudiar el tipo de extremo relativo que hay en $x = -1$, veamos el signo de la segunda derivada en él:

$$f''(x) = 6x: f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{en } x = -1 \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

2) Calcule el valor de $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) para que se verifique el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2(x))^{\frac{a}{x^2}} = 2.$$

SOLUCIÓN

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2(x))^{\frac{a}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2(x))^{\frac{a}{x^2}} = 1^\infty$$

Apliquemos logaritmos neperianos a los dos miembros:

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x)^{\frac{a}{x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln (\cos^2 x)^{\frac{a}{x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x^2} \cdot \ln (\cos^2 x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \ln (\cos^2 x)}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ L'H}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot 2 \cos x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \cdot \sin 2x}{2x \cdot \cos^2 x} = \frac{0}{0} \text{ L'H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \cdot \cos 2x \cdot 2}{2 \cdot \cos^2 x + 2x \cdot 2 \cos x (-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a \cdot \cos 2x}{2 \cdot \cos^2 x - 2x \cdot \sin 2x} =$$

$$= \frac{-2a}{2} = -a \Rightarrow \ln L = -a \Rightarrow L = e^{-a} = 2 \Rightarrow -a = \ln 2 \Rightarrow a = -\ln 2$$

3) Calcule

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} dx.$$

SOLUCIÓN

Es una integral inmediata: $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{1}{3} \ln |x^3 - 3x + 2| + C$

4) Para la siguiente función

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2}$$

- a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.
- b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$.

SOLUCIÓN

- a) ▪ Dominio de definición: $f(x)$ es una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen el denominador. En nuestro caso:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

Por tanto: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

▪ Asíntotas horizontales: no hay, puesto que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = +\infty$

▪ Asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 2$ pues $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \infty$

Posición relativa de la curva respecto a las asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{+ \cdot -}{- \cdot -} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{+ \cdot -}{+ \cdot -} = +\infty$$

Luego la curva tiende a $-\infty$ a la izquierda de $x = -1$ y a $+\infty$ a la derecha de $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{+ \cdot +}{+ \cdot -} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2(2x-1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{+ \cdot +}{+ \cdot +} = +\infty$$

Luego la curva tiende a $-\infty$ a la izquierda de $x = 2$ y a $+\infty$ a la derecha de $x = 2$.

▪ Asíntotas oblicuas $y = mx + n$:

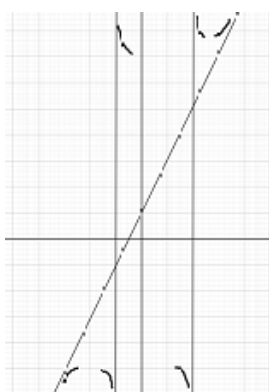
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{x^3 - x^2 - 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - x - 2} = 1$$

$\Rightarrow y = 2x + 1$ es una asíntota oblicua.

Posición relativa de la curva respecto a la asíntota. Restamos las ordenadas de la curva y la asíntota:

$$f(x) - (mx + n) = \frac{2x^3 - x^2}{x^2 - x - 2} - 2x - 1 = \frac{2x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{5x + 2}{x^2 - x - 2}$$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 2}{x^2 - x - 2} = 0^- \Rightarrow$ cuando $x \rightarrow -\infty$ la curva está por debajo de la asíntota.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2}{x^2 - x - 2} = 0^+ \Rightarrow$ cuando $x \rightarrow +\infty$ la curva está por encima de la asíntota.

b) La ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

En este caso: $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{2-1}{1-1-2} = -\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 2x)(x^2 - x - 2) - (2x^3 - x^2)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{4 \cdot (-2) - 1 \cdot 1}{4} = -\frac{9}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es entonces: $y = -\frac{1}{2} - \frac{9}{4}(x - 1) \Leftrightarrow 9x + 4y - 7 = 0$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A - kI$ según los valores de $k \in \mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A - kI$ para $k = 0$.

SOLUCIÓN

$$\text{a)} \quad A - kI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix}$$

El mayor menor es de orden 3:

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{vmatrix} = -k \cdot (2-k) \cdot (3-k) + 2 \cdot (2-k) = (2-k)(-3k + k^2 + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-k=0 \Rightarrow k=2 \\ k^2-3k+2=0 \Rightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{cases}$$

▪ Para $k \neq 1$ y $k \neq 2$: $\text{rg}(A-kI)=3$

▪ Para $k=1$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A-kI)=2$

▪ Para $k=2$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A-kI)=1$ pues solo uno de los vectores fila o columna son linealmente independientes.

b) Para $k=0$: $A-kI=A$ luego debemos calcular A^{-1}

$$|A-kI|=|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \text{ (o } (A-kI)^{-1})$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(*) Matriz adjunta}} (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz traspuesta}} (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz inversa}} A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2; A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$.

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $(A - \frac{1}{2}A^T) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

SOLUCIÓN

a)

$$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} -2 \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ d & e+f & f \\ g & h+i & i \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} -2 \left[\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & c \\ d & f & f \\ g & i & i \end{vmatrix} \right] \stackrel{(4)}{=} \\ = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -10$$

Propiedades de los determinantes utilizadas:

- (1) Al permutar dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo. En este caso hay dos permutas (primera fila por tercera y, después, la segunda por la tercera) por lo que el determinante mantiene su signo.
- (2) Se saca factor común a 2 en la segunda fila y a -1 en la tercera.
- (3) La segunda columna aparece como suma de dos sumandos y el determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes.
- (4) El segundo sumando es un determinante con la segunda y la tercera columnas iguales por lo que el determinante es nulo.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \frac{1}{2}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(A - \frac{1}{2}A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \left(A - \frac{1}{2}A^T\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculemos $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right)^{-1}$:

$$\left|A - \frac{1}{2}A^T\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 2 + 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists \left(A - \frac{1}{2}A^T\right)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(*) \text{ Matriz adjunta}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz inversa}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4; A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1; A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Tenemos entonces:

$$X = \left(A - \frac{1}{2}A^T\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4X + 6Y = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \\ 9X - 6Y = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} 13X = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 0 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \text{Sea } A = A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Generalizando los elementos de la matriz, se tiene: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ -(2^n - 1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix}$

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A = (0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3 , y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$, siendo:

$$B_1 = (-1, 0, 2), \quad B_2 = (1, 3, 1), \quad B_3 = (2, -1, 0).$$

SOLUCIÓN

Calculemos, en primer lugar, la ecuación del plano π_1 determinado por el punto $B_1(-1, 0, 2)$ y los vectores $\overrightarrow{B_1B_2} = (2, 3, -1)$ y $\overrightarrow{B_1B_3} = (3, -1, -2)$:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6x - 6 - 3y - 2z + 4 - 9z + 18 + 4y - x - 1 = -7x + y - 11z + 15 = 0$$

Los vectores $\vec{n}_1 = (-7, 1, -11)$ y $\vec{n}_2 = (1, 0, 2)$ son perpendiculares a los planos π_1 y π_2 respectivamente. Su producto vectorial será entonces un vector paralelo a los planos y direccional de la recta que buscamos:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 11\vec{j} - \vec{k} + 14\vec{j} = (2, 3, -1)$$

La recta está determinada por el punto $A(0, 1, 1)$ y el vector direccional $\vec{u} = (2, 3, -1)$:

La ecuación continua es $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ y su ecuación implícita: $\begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

9) Sean los siguientes vectores:

$$\vec{u}_1 = (-1, 1, 1), \quad \vec{u}_2 = (0, 3, 1), \quad \vec{u}_3 = (1, -2, 0), \quad \vec{u}_4 = (-2, 0, 1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo:

$$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}, \quad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}, \quad \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}.$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes expresiones:

$$(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot (2\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \quad (\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \times (\vec{u}_4 - \vec{u}_1),$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

SOLUCIÓN

a) $\vec{v}_1 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (-2, 2, 2) - (0, 3, 1) = (-2, -1, 1)$; $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3 = (-1, 1, 1) + (1, -2, 0) = (0, -1, 1)$;
 $\vec{v}_3 = \vec{u}_4 = (-2, 0, 1)$

Veamos si son o no linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ y } \vec{v}_3 \text{ son linealmente independientes.}$$

b) $\bullet 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (-2, -1, 1) \Rightarrow (-2, -1, 1) \cdot (-2, -1, 1) = 4 + 1 + 1 = 6$

- $(\vec{u}_4 - \vec{u}_1) \times (\vec{u}_4 - \vec{u}_1) = 0$ pues el producto vectorial de un vector por él mismo es cero.

10) La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media $120 \mu\text{g/dl}$ y desviación típica $30 \mu\text{g/dl}$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a $75 \mu\text{g/dl}$.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

b) (1 punto) El 45% de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k . Averigüe el valor de k .

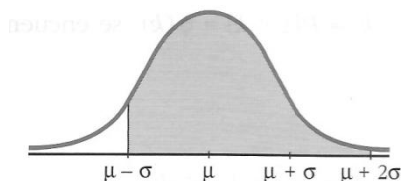
[illegible]

3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

- a) Los datos de que disponemos pertenecen a una distribución normal de media $\mu = 120 \mu\text{g/dl}$ y desviación típica $\sigma = 30 \mu\text{g/dl}$, es decir una normal $N(120, 30)$.



Para hacer uso de la tabla correspondiente a la normal $N(0,1)$ debemos tipificar las variables $x \in N(120, 30)$ convirtiéndolas en variables $z \in N(0,1)$:

$$x \in N(120, 30) \longleftrightarrow z \in N(0, 1)$$

$$x = 75 \longleftrightarrow z = \frac{75 - 120}{30} = -1,5$$

$$P[x \leq 75] = P[z \leq -1,5] = P[z \geq 1,5] = 1 - P[z \leq 1,5] = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

- b) Las variables pertenecen a la distribución normal $N(120, 30)$ por lo que debemos tipificarlas:

$$x \in N(120, 30) \longleftrightarrow z \in N(0, 1)$$

$$x \longleftrightarrow z = \frac{x - 120}{30}$$

$$P[x > k] = P\left[\frac{x - 120}{30} > \frac{k - 120}{30}\right] = P\left[z > \frac{k - 120}{30}\right] = 0,45 \Rightarrow 1 - P\left[z < \frac{k - 120}{30}\right] = 0,45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[z < \frac{k - 120}{30}\right] = 0,55 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{k - 120}{30} = 0,125 \Rightarrow k = 123,75 \mu\text{g/dl}$$

(*) Buscando en la tabla los valores más próximos a 0,55, encontramos 0,5478 para $k = 0,12$ y 0,5517 para $k = 0,13$. Como 0,55 está próximo a la media de ambos valores, hemos elegido como valor de k la media de 0,12 y 0,13, es decir 0,125.