



PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + e^3, & x \leq 0 \\ (1-x)^{a/x}, & x > 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- a) (1 punto) Determina los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula, para $a = 1$, la recta tangente a la función en $x = -4$.

SOLUCIÓN

- a) $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ la función es continua por tratarse de funciones continuas las definidas en sus respectivos intervalos.

Falta asegurar la continuidad en $x=0$. Y para que lo sea debe ser $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{-x} + e^3) = e^3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{a/x} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{a}{x} \cdot (1-x-1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{a}{x} \cdot (-x) \right]} = e^{-a} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow e^3 = e^{-a} \Rightarrow a = -3 \end{array} \right.$$

- b) La ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = x_0$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

En $x = -4$ la función definida es $f(x) = \sqrt{-x} + e^3 \Rightarrow f(-4) = 2 + e^3$.

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}} \Rightarrow f'(-4) = -\frac{1}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es entonces:

$$y - 2 - e^3 = -\frac{1}{4} \cdot (x + 4) \Leftrightarrow 4y - 8 - 4e^3 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 4 - 4e^3 = 0$$

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{3x^2 - 2} - (\sqrt{3}x + 5)].$$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{3x^2 - 2} - (\sqrt{3}x + 5)] = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{3x^2 - 2} - (\sqrt{3}x + 5)][\sqrt{3x^2 - 2} + (\sqrt{3}x + 5)]}{[\sqrt{3x^2 - 2} + (\sqrt{3}x + 5)]} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2 - (\sqrt{3}x + 5)^2}{\sqrt{3x^2 - 2} + (\sqrt{3}x + 5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2 - 3x^2 - 10\sqrt{3}x - 25}{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt{3}x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10\sqrt{3}x - 27}{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt{3}x + 5} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10\sqrt{3} - \frac{27}{x}}{\sqrt{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{3} + \frac{5}{x}} = \frac{-10\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{-10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -5$$

3) Calcula:

$$\int e^{-x} (x^2 - 1) dx.$$

SOLUCIÓN

Resolveremos la integral por el método de integración por partes: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$:

$$\int e^{-x} (x^2 - 1) dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right| = -e^{-x} (x^2 - 1) - \int (-e^{-x}) \cdot 2x dx = -e^{-x} (x^2 - 1) + 2 \int x \cdot e^{-x} \cdot dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right| = -e^{-x} (x^2 - 1) + 2 \left[-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx \right] = -e^{-x} (x^2 - 1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C =$$

$$= -e^{-x} (x^2 + 2x + 1) + C = -e^{-x} (x + 1)^2 + C$$

4) Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

a) (1 punto) Obtén el dominio de definición y estudia su crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Analiza la curvatura (concavidad = $\cap$ y convexidad = $\cup$) y existencia de puntos de inflexión en su dominio de definición. Obtén los puntos de inflexión caso de existir.

SOLUCIÓN

a) ▪ Dominio de definición: $f(x)$ es una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen el denominador. En nuestro caso: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

▪ La función $y = f(x)$ es creciente $\forall x$ para los que $f'(x) > 0$ y decreciente $\forall x$ para los que $f'(x) < 0$.

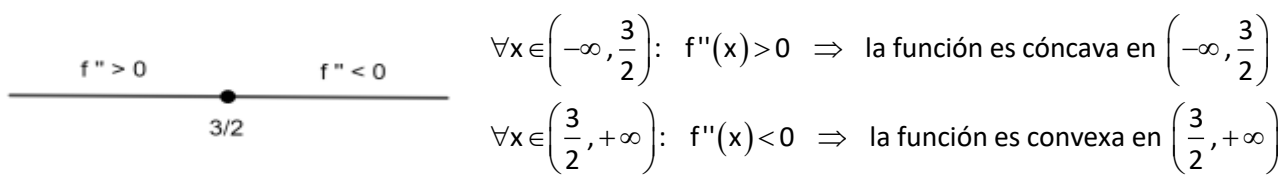
$$f'(x) = \frac{2(x-1) \cdot x^2 - 2x \cdot (x-1)^2}{x^4} = \frac{2x(x-1)(x-x+1)}{x^4} = \frac{2x(x-1)}{x^4}$$

El signo de $f'(x)$ depende del signo del numerador (puesto que el denominador es positivo $\forall x$) que cambia en $x=0$ y en $x=1$:

$$\begin{array}{c} f' > 0 \quad f' < 0 \quad f' > 0 \\ \text{---} \bullet \quad \text{---} \bullet \text{---} \\ \quad 0 \quad \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty): f'(x) > 0 \\ \forall x \in (0, 1): f'(x) < 0 \end{array}$$

luego la función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1)$.

$$b) f''(x) = \frac{2(x-1+x) \cdot x^4 - 2x(x-1) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{2x^4(2x-1-4x+4)}{x^8} = \frac{2(-2x+3)}{x^4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



Aunque ya podemos decidir que en $x = \frac{3}{2}$ hay un punto de inflexión pues la función pasa de ser cóncava a ser convexa, caractericemos la existencia del punto de inflexión calculando la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{-4x^4 - 2(-2x+3) \cdot 4x^3}{x^4} \Rightarrow f'''(\frac{3}{2}) = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{En } x = \frac{3}{2} \text{ la función tiene un punto de}$$

$$\text{inflexión: } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \text{Punto de inflexión: } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{9}\right)$$

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $AX - 2I = A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz $A - mB$, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

$$a) \quad AX - 2I = A^2 \Rightarrow AX = A^2 + 2I \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(A^2 + 2I) \Rightarrow X = A^{-1}(A^2 + 2I)$$

Obtengamos las matrices que necesitamos:

▪ Matriz A^{-1} :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A \xrightarrow{\text{* Matriz adjunta}} (\text{Adj} A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz traspuesta}} (\text{Adj} A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz inversa}} A^{-1} = \frac{(\text{Adj} A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bullet \text{ Matriz } A^2 + 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Tenemos entonces: } X = A^{-1}(A^2 + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A - mB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+m & 0 \\ -m & 0 & 1-m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

El mayor menor es de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1+m & 0 \\ -m & 0 & 1-m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = (-1+m) \cdot (1-m) + m \cdot (-1+m) - m \cdot (1-m) = -1+m+m-m^2-m+m^2-m+m^2 =$$

$$= m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 1$$

$$\bullet \text{ Para } m \neq -1 \text{ y } m \neq 1: \text{ rg}(A - mB) = 3$$

$$\bullet \text{ Para } m = -1: (A - mB) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y como el menor } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A - mB) = 2$$

$$\bullet \text{ Para } m = 1: (A - mB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y como el menor } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A - mB) = 2$$

6)

$$\text{a) (1 punto) Sabiendo que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2, \text{ calcula justificadamente}$$

$$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN

a)

$$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} -a & -c & -b \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} -a & -c & -b \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} -\frac{3}{2} \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=}$$

$$= -\frac{3}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot (-2) = 3$$

Propiedades de los determinantes utilizadas:

- (1) Los elementos de la primera fila están descompuestos en sumas de dos sumandos.
- (2) El segundo determinante es 0 porque la primera y la tercera filas son proporcionales.
- (3) Se saca factor común a -1 en la primera fila, a $\frac{1}{2}$ en la segunda fila y a 3 en la tercera fila.
- (4) Al permutar dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo. En este caso hay dos permutas (segunda columna por la tercera y, después, la primera fila por la tercera) por lo que el determinante mantiene su signo.

b) La matriz cuadrada B es invertible si su determinante es distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 10 + 9 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(*) \text{ Matriz adjunta}} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz traspuesta}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz inversa}} B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/4 & 3/4 & -3/4 \\ 5/4 & -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$

(*) Matriz adjunta:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 ; A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -5 ; A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -5 ; A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 ; A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 ;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 ; A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 ; A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 ; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

7) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x + az = -4 \\ 4x - 3z = a + 1 \end{cases}$$

- a)** (1 punto) Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible).
- b)** (1 punto) Resuelve el sistema para $a=1$.

SOLUCIÓN

a) Sean A la matriz de los coeficientes y B la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & a & -4 \\ 4 & 0 & -3 & a+1 \end{pmatrix}$$

Comparemos los rangos de ambas matrices según los valores de a.

El mayor menor de A es:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 12a + 18 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

▪ Para $a \neq -\frac{3}{2}$: $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

▪ Para $a = -\frac{3}{2}$: $\text{rg } A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Orlamos ese menor con los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = -48 + 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} B = 3 \Rightarrow \text{rg} A \neq \text{rg} B \Rightarrow \text{el sistema es incompatible.}$$

b) Para $a=1$ el sistema es:
$$\begin{cases} -x + 3y + z = 5 \\ 2x + z = -4 \\ 4x - 3z = 2 \end{cases}$$
 y sabemos que es compatible determinado. Lo resolvemos

por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{6-36}{12+18} = \frac{-30}{30} = -1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-12+4+20+16+30+2}{30} = \frac{60}{30} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-48-12}{30} = \frac{-60}{30} = -2$$

8)

a) (1 punto) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2 , y además pasa por el punto $(-1, 2, 1)$, siendo

$$r_1 = \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad y \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b) (1 punto) Dado el vector $\vec{v} = (2, k, 2k)$, calcula el valor $k \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

SOLUCIÓN

a) La recta r_1 contiene al punto $P(0, -2, 0)$ y tiene como vector direccional $\vec{u}_1 = (3, 1, 1)$. La recta r_2 contiene al punto $Q(-1, 0, 0)$ y tiene como vector direccional $\vec{u}_2 = (6, -2, 1)$. Para que las rectas r_1 y r_2 estén contenidas en un plano, los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 0)$ deben ser linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 2 - 6 \neq 0 \Rightarrow \text{los vectores son linealmente independientes} \Rightarrow \text{las rectas se}$$

cruzan y, por tanto, no están contenidas en un plano $\Rightarrow$ No es posible hallar un plano que contenga a ambas rectas.

b) Para que los vectores $\vec{v} = (2, k, 2k)$, $\vec{u}_1 = (3, 1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (6, -2, 1)$ sean linealmente dependientes, debe ser:

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 2k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + 6k - 12k - 12k - 3k + 4 = -21k + 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{7}$$

9)

a) v (1 punto) Dados los siguientes vectores: $\vec{v}_1 = a\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ siendo

$$\vec{v}_1 = (1, 0, -2) \text{ y } \vec{v}_2 = (3, 1, 0)$$

SOLUCIÓN

a) Como los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son ortogonales y de módulo 1, constituyen una base ortonormal.

$$\vec{v}_1 = a\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 = (a, -2, 3) \quad , \quad \vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (-1, a, 1)$$

$$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow -a - 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$$

b) La forma de construir el vector $\vec{v}_3$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ nos indica que los tres vectores son coplanarios y por tanto el volumen del tetraedro que los tiene como aristas será 0.

No obstante, se podría haber calculado el volumen:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (4, 1, -2)$$

$$V = \frac{1}{6} [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \frac{1}{6} [\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-2 - 6 + 8) = 0$$

10) El peso de los recién nacidos de una localidad, sigue una distribución normal de media 3300 gramos y desviación típica 465 gramos. Un recién nacido tiene bajo peso si su peso es inferior a 2500 gramos.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga bajo peso?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido en esta localidad tenga un peso entre 3500 y 4000 gramos?

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8

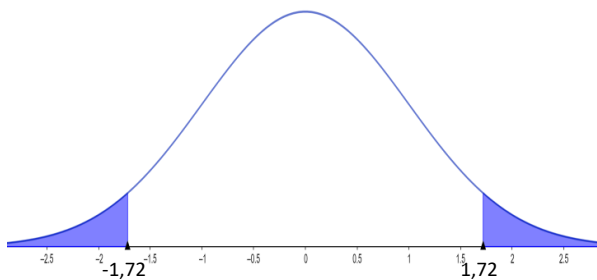
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	3,0
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	3,1
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	3,2
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	3,3
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	3,4
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	3,5
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	3,6

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

- a) Los datos de que disponemos pertenecen a una distribución normal de media $\mu = 3300$ gr. y desviación típica $\sigma = 465$ gr., es decir una normal $N(3300, 465)$.

Para hacer uso de la tabla correspondiente a la normal $N(0,1)$ debemos tipificar las variables $x \in N(3300, 465)$ convirtiéndolas en variables $z \in N(0,1)$:

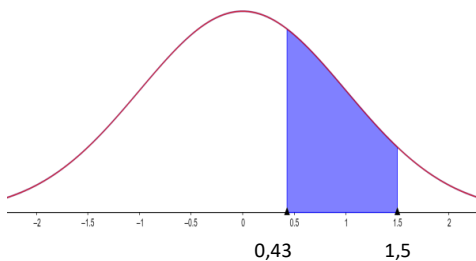


$$x \in N(3300, 465) \longleftrightarrow z \in N(0, 1)$$

$$x = 2500 \longleftrightarrow z = \frac{2500 - 3300}{465} = -1,72$$

$$\begin{aligned} P[x \leq 2500] &= P[z \leq -1,72] = P[z \geq 1,72] = \\ &= 1 - P[z \leq 1,72] = 1 - 0,9573 = 0,0427 \end{aligned}$$

- b) Las variables pertenecen a la distribución normal $N(3300, 465)$ por lo que debemos tipificarlas:



$$x \in N(3300, 465) \longleftrightarrow z \in N(0, 1)$$

$$x = 3500 \longleftrightarrow z = \frac{3500 - 3300}{465} = 0,43$$

$$x = 4000 \longleftrightarrow z = \frac{4000 - 3300}{465} = 1,505$$

$$\begin{aligned} P[3500 \leq x \leq 4000] &= P[0,43 \leq z \leq 1,51] = \\ &= P[z \leq 1,51] - P[z \leq 0,43] = 0,9345 - 0,6664 = 0,2681 \end{aligned}$$