EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL

CURSO 2022–2023

MATERIA: MATEMÁTICAS II		**(1)**
	Convocatoria:	

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Criterios de calificación

A) Se valorará todo lo escrito en cada respuesta y no sólo el resultado final.

B) En las respuestas se corregirán los desarrollos necesarios y también las explicaciones breves de los mismos.

C) Cada error cometido en una respuesta resta calificación en función de la importancia de dicho error, pero no repercute en lo que se haya hecho después, mientras lo realizado sea coherente con dicho error y tenga sentido matemático.

D) Se penalizará cada notación gravemente incorrecta, que indique desconocimiento de cuestiones importantes (por ejemplo, usar la notación de determinante cuando se trata de una matriz o viceversa, confundir coordenadas de vector o de punto).

E) Cuando sea necesario representar gráficamente una función, dicha representación deberá basarse en características importantes de la misma, que deberá obtener previamente, aunque en el enunciado de la pregunta esto no se haya pedido de forma explícita.

F) Cuando haya que representar gráficamente una región plana, sea limitada por rectas, sea limitada por curvas y rectas, o sea limitada por varias curvas, no sólo habrá que representar correctamente los segmentos o arcos que intervengan (según apartado E), sino que habrá que calcular los puntos de corte entre ambas gráficas, si dichos puntos están relacionados con la región pedida. Se dará cada uno de esos puntos con sus dos coordenadas, aunque no se pida explícitamente.

G) Cuando se piden abscisas basta con la coordenada x. Cuando se piden puntos deben dar las dos coordenadas.

H) Los rangos de las matrices hay que justificarlos (puede hacerse por la técnica de menores orlados o reduciendo la matriz a una escalonada por filas equivalentes)

I) En respuestas sobre geometría del espacio, no basta escribir una ecuación pedida (o que se necesite para otro resultado), sino que se requiere una explicación mínima de lo que significa geométricamente y de dónde provienen los números que aparecen en esta como coeficientes. Igualmente, cuando se trata de varias ecuaciones simultáneas (ecuaciones de una recta o ecuaciones paramétricas de un plano).

J) Los cálculos intermedios hay que hacerlos siempre en forma exacta (se observa que algunos alumnos, desde el principio de una respuesta, sustituyen algún valor por una mala aproximación decimal, con la cual operan dando por bueno el resultado final obtenido, que suele estar muy alejado del resultado correcto). Así uno de los objetivos a evaluar es una operatoria adecuada y que conozcan el uso correcto de los números que deben utilizar según el contexto de trabajo.

K) Se exige utilizar correctamente los signos de igualdad y de aproximación.

L) En los cálculos de probabilidad donde se proceda a realizar la aproximación de la distribución binomial por la distribución normal se debe justificar que el procedimiento se puede hacer.

M) En los problemas de probabilidad se debe indicar el teorema que se utiliza para realizar el cálculo de la probabilidad.

N) Los problemas de probabilidad que utilicen la Distribución Binomial, deberán escribir la fórmula de cálculo de la probabilidad.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2},\ t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 ptos

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 ptos

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 ptos

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 ptos

Solución:

a)

$$TVM[0,6] = \frac{\frac{5\cdot 36}{8+36} - 0}{6-0} = \frac{180}{288} = \frac{15}{22} = 0.68$$

$$TVM[6,12] = \frac{\frac{5\cdot 144}{8+144} - \frac{5\cdot 36}{8+36}}{12-6} \approx 0.107$$

En ambos semestres se produce un incremento medio de las ventas, pero en el primer semestre el aumento de las ventas por mes es casi 6 veces mayor que el incremento por mes del segundo semestre.

b) Para valorar el crecimiento de esta función calculamos su primera derivada,

$$V'(t) = \frac{10t(8+t^2) - 5t^2 \cdot 2t}{(8+t^2)^2} = \frac{80t}{(8+t^2)^2}$$

Por tanto, para $t \geq 0$ la derivada siempre es positiva y la función crece.

De lo que se deduce que la afirmación es cierta.

c) Igualamos la función a 4,

$$\frac{5t^2}{8+t^2} = 4;\ t^2 = 32;\quad t = \sqrt{32} \approx 5.65\, meses \approx \boxed{5\ meses\ y\ 19\ \ días}$$

d) La función ingresos sería:

$$I(t) = \frac{precio}{unidad} \cdot unidades = 2 \cdot \frac{5t^2}{8+t^2} \cdot 1000 = \frac{10000t^2}{8+t^2}$$

Para poder analizar su tendencia a lo largo del tiempo calculamos el límite cuando $t \to \infty$

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{10000t^2}{8+t^2} = 10.000$	Los ingresos tenderían a 10.000 euros

1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -2} \frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8} = \frac{3}{2}$$ 1 ptos

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}dx$ 1.5 ptos

Solución:

a) $\lim_{x\to -2} \frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -2} \frac{k(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{k(x-2)}{x+4} = \frac{-4k}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{k = \frac{-3}{4}}$$

b) $\int x\sqrt{2x-1}dx = \begin{bmatrix} t^2 = 2x-1;\ x = \frac{t^2+1}{2} \\ tdt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{t^2+1}{2} \cdot \sqrt{t^2} \cdot t\, dt = \frac{1}{2}\int t^4 + t^2\, dt =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{2x-1})^5}{5} + \frac{(\sqrt{2x-1})^3}{3}\right) + C$

$$\boxed{\int x\sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{2x-1})^5}{5} + \frac{(\sqrt{2x-1})^3}{3}\right) + C}$$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + ky + 2z = k \\ 2x + ky - z = 2 \\ kx - y + 2z = k \end{cases}$$

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k. 1.5 ptos

b) Resolver el sistema para $k = 2$. 1 ptos

Solución:

a) Definimos la matriz del sistema $A = \begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & k & 2 & k \\ 2 & k & -1 & 2 \\ k & -1 & 2 & k \end{array}\right)$

Estudiamos el $rang(A)$:
Para ello calculamos $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2k - 4 - k^2 - 2k^2 + 1 - 4k = -3\,k^2 - 6k - 3 = 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow \quad k = -1$

Por tanto,

- Si $\boldsymbol{k \neq -1}$,$|A| \neq 0 \quad \Rightarrow \; rang(A) = rang(M) = 3$

Nº de incógnitas =3

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es un SCD con solución única.

- Si $\boldsymbol{k = -1}$, $|A| = 0 \quad \Rightarrow \; rang(A) \neq 3$

Entonces: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

El $rang(A) = 2$, pues el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 \neq 0$

Estudiemos el $rang(M) = rang\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$. Como la 1ª y 3ª filas son iguales, $rang(M) = 2$.

Tenemos en este caso:

$$rang(A) = rang(M) = 2$$

Nº de incógnitas =3

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es un SCI con infinitas soluciones.

b) Si $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$, el sistema (como hemos visto en a)) es un SCD con:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Aplicamos la regla de Cramer para resolverlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX + B^t = A^2$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.5 ptos

Solución:

Primera forma

Resolvemos la ecuación:

$AX + B^t = A^2 \rightarrow AX = A^2 - B^t \rightarrow X = A^{-1}(A^2 - B^t)$

En primer lugar, hallaremos la matriz inversa de A, la matriz cuadrada de A y la traspuesta de B:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{A^t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(\mathrm{A^t}) = \frac{1}{-1} Adj \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{B^t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación:

$$X = A^{-1}(A^2 - B^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Segunda forma

$AX + B^t = A^2 \rightarrow AX = A^2 - B^t \rightarrow X = A^{-1}(A^2 - B^t) = A - A^{-1}B^t$

En primer lugar, hallaremos la matriz inversa de A.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}) = \frac{1}{-1} Adj \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora B^{t}

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{B}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = A - A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0)\ ;\quad r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P. 1.75 ptos

Averigua el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x-5=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-9}{3}$ 0.75 ptos

SOLUCIÓN

a) Llamemos t a la recta perpendicular al plano. $P\in\pi; O\in\pi$ y P $\in t$; además: $\pi\perp t\rightarrow\overrightarrow{n_\pi}\parallel\overrightarrow{u_t}$

El vector se extrae de $\overrightarrow{OP}=(1,-2,0)\equiv\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{n_\pi}$

Ecuación del plano será de la forma: $x-2y+D=0$

Como el punto $P\in\pi: 1-2\cdot(-2)+0+D=0\rightarrow 5+D=0\rightarrow D=-5$

$\boxed{\pi: x-2y-5=0}$

Ángulo que forma la recta r con el plano encontrado π

Buscamos el vector director de r:

$$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2i+2j+2k=(1,1,1)$$

$$(\widehat{r,\pi})=arcsen\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}|}{\|\overrightarrow{u_r}\|\cdot\|\overrightarrow{n_\pi}\|}=arcsen\frac{|(1,1,1)(1-2,0)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=arcsen\frac{1}{\sqrt{15}}=14{,}9632°$$

$$\boxed{(\widehat{r,\pi})=14.9632°=14°\,57'\,47.52''}$$

b) La recta s en paramétrica será:

$$s:\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-1-2\lambda\ ,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=9+3\lambda \end{cases}$$

Sustituimos los puntos de s en paramétricas en la recta r:

$$\begin{matrix} 5+\lambda-2(-1-2\lambda)+9+3\lambda=5+2+9+\lambda+4\lambda+3\lambda=16+8\lambda=0 \\ 5+\lambda-9-3\lambda=-4-2\lambda=0 \end{matrix}\rightarrow\lambda=-2$$

$$\begin{cases} x=5+(-2)=3 \\ y=-1-2(-2)=3 \\ z=9+3(-2)=3 \end{cases}$$

Punto de corte: $Q(3,3,3)$

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} 8x+2y-3z+12=0 \\ -7x-y+3z=9 \end{cases} \quad ; \quad s: x=y+1=\frac{z-2}{2}.$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 ptos

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. 1.25 ptos

Solución:

a) Para que r y s puedan estar contenidas en un mismo plano, deben ser paralelas, coincidentes o cortarse en un punto.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 2 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(3,-3,6)=(1,-1,2) \quad y \quad \overrightarrow{v_s}=(1,1,2)$$

Como vemos $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}$, por tanto, las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

Veamos si se cortan,

$$s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+\lambda, \\ z=2+2\lambda \end{cases} \qquad r:\begin{cases} 8\lambda-2+2\lambda-6-6\lambda+12=0 \\ -7\lambda+1-\lambda+6+6\lambda-9=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-1.$$

Se intersectan en el punto Q(-1,-2,0). Por tanto, están contenidas en un mismo plano.

El plano que las contiene tiene como ecuación:

$$\pi:\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-4(x+1)+0(y+2)+2z=0;\ \pi: 4x-2z+4=0;$$

$$\boxed{\pi: 2x-z+2=0}$$

b) Construimos el plano que es perpendicular a r y que pasa por P. Por tanto, $\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,2)$,

$$\pi: x-y+2z+C=0$$

Vamos a sustituir *P* en la ecuación del plano

$$1+4+C=0\Rightarrow C=-5; \quad \pi: x-y+2z-5=0.$$

Ahora calculamos la intersección del plano con la recta r y obtenemos un punto por donde va a pasar la recta perpendicular que estamos buscando. Pasamos la recta r a ecuación paramétrica, $P_r=r\cap s=Q(-1,-2,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,2)$

$$r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-2-\lambda, \\ z=2\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Sustituyendo las coordenadas de los puntos de r en el plano π, calculamos el punto de intersección.

$$(-1-\lambda)+2+\lambda+2(2\lambda)-5=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{3};\ R\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},\frac{4}{3}\right)$$

La recta t que buscamos es la recta que pasa por los puntos P y R, entonces

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{PR} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{4}{3}\right) - (0, -1, 2) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-2}{3}\right) \equiv (1,5,2)$$

$$\boxed{t: (x, y, z) = (0, -1, 2) + \lambda(1,5,2),\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

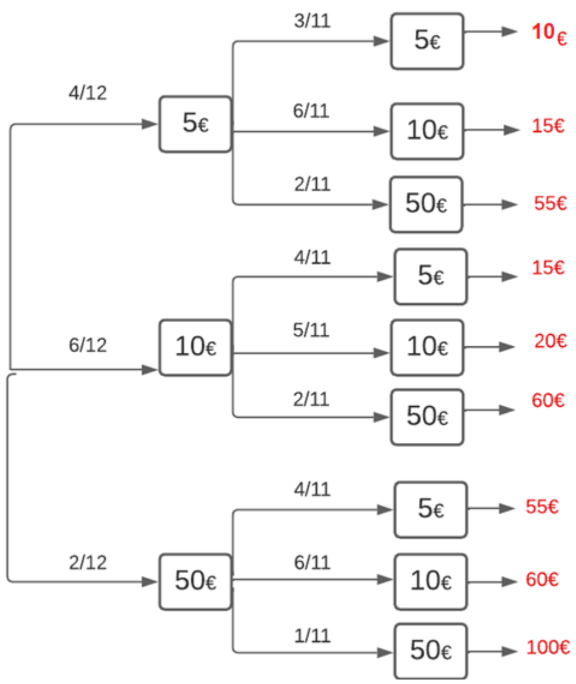
Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 ptos
b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1.5 ptos
c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 ptos

Solución:

a) Si definimos el experimento como sacar dos billetes del sobre sin reemplazamiento y X=la cantidad de euros obtenida.



Entonces:

$$E = \{10,15,20,55,60,100\}$$

b) $P(X \geq 57) = P(X = 60) + P(X = 100)$

$$P(X = 60) = \frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11} + \frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{2}{11}$$

$$P(X = 100) = \frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11} = \frac{1}{66}$$

$$P(X \geq 57) = \frac{2}{11} + \frac{1}{66} = \frac{13}{66} \approx 0.1970$$

Tendría una probabilidad aproximada del 20% de comprarse el videojuego con el dinero que obtiene del sobre.

c) Aplicando el Teorema de Bayes

$$P\left(1^{\text{º}}\,10€/_{X = 60€}\right) = \frac{P(1^{\text{º}}\,10€)\cdot P\left({}^{x = 60}/_{1^{\text{º}}\,10€}\right)}{P(x = 60)} = \frac{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}}{\left(\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11} + \frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}\right)} = \frac{\frac{1}{11}}{\frac{2}{11}}$$

$$= \frac{1}{2} = 0.5$$

La probabilidad de que habiendo obtenido 60€ con este experimento, el primer billete fuese de 10€ es de 0.5

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 ptos

b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 ptos

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 1 ptos

Solución:

a) p es la proporción coches que tienen un reventón en la carrera: p=0.04

Llamamos X al número de coches que sufren un reventón en la carrera.

Como cada coche sólo tiene dos posibles situaciones: que haya tenido un reventón o no, siendo sucesos independientes, se puede afirmar que:

X sigue una distribución binomial de parámetros: n=10, p=0.04 y q=0.96

$$P(X=2)=\binom{10}{2}0.04^2\cdot 0.96^8=0.0519$$

La probabilidad de que sólo dos coches sufran un reventón es aproximadamente del 5%.

b) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))$

$$P(X=0)=\binom{10}{0}0.04^0 0.96^{10}=0.6648$$
$$P(X=1)=\binom{10}{1}0.04^1 0.96^{9}=0.2770$$

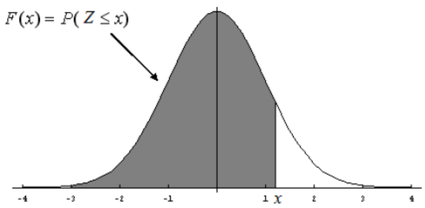
$$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\big)$$
$$=1-(0.6648+0.2770+0.0519)=0.0063$$

Es cierta la afirmación porque la probabilidad no llega al 1%.

c) n=250, como $n\cdot p=250\cdot 0.04=10\ \ y\ \ n\cdot q\ =250\cdot 0.96=240\geq 5$, podemos aproximar esta binomial a una normal de media $\mu=n\cdot p=10$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=3.1$
$X\sim N(10{,}3.1)$

$$P(X>12)=P\left(Z>\frac{12-10}{3.1}\right)=P(Z>0.65)=1-P(Z<0.65)=1-0.7422$$
$$=0.2578$$

Existe una probabilidad de 0.2578 de que haya más de 12 reventones en la competición.



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767