

Fracciones algebraicas

Simplifica y anota las restricciones originales. En las divisiones, el divisor no puede ser cero.

01 Suma

$$\frac{2}{x-2} + \frac{x+1}{x^2-4}$$

02 Resta

$$\frac{-2x+3}{x+2} - \frac{2x-10}{x^2+2x}$$

03 Combinada con paréntesis

$$\left(1 - \frac{2}{x}\right) \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{1}{x+2}\right)$$

04 Cuatro términos

$$\frac{x^2-2x+16}{x^3-16x} + \frac{2}{x^2-16} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x}$$

05 Dos variables

$$\left(\frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y}\right) \left(\frac{x}{2y} - \frac{2y}{x}\right)$$

06 Producto de polinomios

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+4x+3}$$

07 Signos y factor común

$$\frac{-6x^2+12x}{9x^2} \cdot \frac{3x}{x^2-4}$$

08 Dividir no es multiplicar

$$\frac{x^2-9}{x^2-4} \div \frac{x-3}{x+2}$$

09 Dos divisiones seguidas

$$\left(\frac{2x}{x-4} \div \frac{3x^2}{x^2-16}\right) \div \frac{4(x+4)}{x}$$

10 Una fracción de fracciones

$$\frac{\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-4} + \frac{x}{x-2}}{\frac{x^2-16}{x^2-2x-8}}$$

Ecuaciones racionales

Resuelve en los números reales. Antes de operar, excluye los valores que anulan denominadores; comprueba cada candidato en la ecuación original.

11 Dos fracciones y un número

$$\frac{5-x}{x+3} - \frac{x-1}{x-3} = -2$$

12 Dos fracciones equivalentes

$$\frac{3}{x-1} = \frac{5}{x+2}$$

13 Resta de fracciones

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+4}{x} = 2$$

14 La incógnita fuera de la fracción

$$x + \frac{6}{x-1} = 6$$

15 Un cociente igual a cero

$$\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = 0$$

16 Denominadores relacionados

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{4x}{x^2 - 4}$$

17 Ruffini tras eliminar el denominador

$$x^2 + \frac{4}{x-1} = 3x + 2$$

18 Un numerador cúbico

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 8}{x-2} = 2$$

19 Coeficientes enteros

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 3x + 6}{x+3} = 1$$

20 Un denominador cuadrático

$$\frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = 1$$

Soluciones · Operaciones

01 Suma

$$x \neq -2, 2$$

Factoriza $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. El numerador común es $2(x + 2) + x + 1 = 3x + 5$.

$$\frac{3x + 5}{(x - 2)(x + 2)}$$

02 Resta

$$x \neq 0, -2$$

El denominador común es $x(x + 2)$. El numerador es $x(-2x + 3) - (2x - 10) = -2x^2 + x + 10 = (x + 2)(5 - 2x)$.
Cancela el factor $x + 2$, pero conserva $x \neq -2$.

$$\frac{5 - 2x}{x}$$

03 Combinada con paréntesis

$$x \neq 0, -2, 2$$

El primer paréntesis es $(x - 2)/x$. En el segundo, el numerador común es $3x - (x - 2) = 2(x + 1)$. Multiplica y cancela $x - 2$.

$$\frac{x - 2}{x} \cdot \frac{2(x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2(x + 1)}{x(x + 2)}$$

04 Cuatro términos

$$x \neq 0, -4, 4$$

El denominador común es $x(x - 4)(x + 4)$. El numerador queda $x^2 - 2x + 16 + 2x - x(x + 4) + x^2 - 16 = x(x - 4)$.
Cancela los factores comunes.

$$\frac{x(x - 4)}{x(x - 4)(x + 4)} = \frac{1}{x + 4}$$

05 Dos variables

$$x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm 2y$$

En el primer paréntesis, $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2 = 8xy$. El segundo tiene numerador $x^2 - 4y^2$. Factoriza y cancela solo factores completos.

$$\frac{8xy}{x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x^2 - 4y^2}{2xy} = 4$$

Soluciones · Operaciones

06 Producto de polinomios

$$x \neq -3, -2, -1, 3$$

Factoriza: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ y $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.
 Cancela los factores comunes.

$$\frac{x-2}{x+1}$$

07 Signos y factor común

$$x \neq 0, -2, 2$$

Extrae $-6x(x - 2)$ en el primer numerador y factoriza $x^2 - 4$. El coeficiente es $-18/9 = -2$. Cancela x^2 y $x - 2$; conserva las exclusiones iniciales.

$$\frac{-18x^2(x-2)}{9x^2(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{x+2}$$

08 Dividir no es multiplicar

$$x \neq -2, 2, 3$$

Además de $x \neq \pm 2$, exige $x \neq 3$: el divisor no puede ser cero. Multiplica por su inversa y cancela factores.

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x-3} = \frac{x+3}{x-2}$$

09 Dos divisiones seguidas

$$x \neq 0, -4, 4$$

Resuelve de izquierda a derecha. La primera división da $2(x + 4)/(3x)$. Divide entre $4(x + 4)/x$ multiplicando por $x/[4(x + 4)]$. Los dos divisores deben estar definidos y ser distintos de cero.

$$\frac{2(x+4)}{3x} \cdot \frac{x}{4(x+4)} = \frac{1}{6}$$

10 Una fracción de fracciones

$$x \neq -4, -2, 2, 4$$

El numerador grande se reduce a $(x - 1)(x + 4)/[(x - 2)(x + 2)]$. El denominador grande se reduce a $(x + 4)/(x + 2)$. Multiplica por su inversa. $x = -4$ también se excluye porque anula el denominador grande; $x = 4$ anula un denominador interior.

$$\frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{x+4} = \frac{x-1}{x-2}$$

Soluciones · Ecuaciones

11 $x \neq -3, 3$

Multiplica por $(x+3)(x-3)$: $(5-x)(x-3) - (x-1)(x+3) = -2(x^2-9)$. Al desarrollar, $-2x^2 + 6x - 12 = -2x^2 + 18$; de ahí, $x = 5$.

$$6x - 30 = 0$$

Para $x = 5$, los denominadores son 8 y 2; el primer miembro vale $0 - 2 = -2$.

$$S = \{5\}$$

12 $x \neq 1, -2$

Elimina los denominadores: $3x + 6 = 5x - 5$. Así, $2x = 11$.

$$3(x+2) = 5(x-1) \Rightarrow x = \frac{11}{2}$$

En $x = 11/2$, los denominadores son $9/2$ y $15/2$, no nulos. Ambos miembros valen $2/3$.

$$S = \left\{\frac{11}{2}\right\}$$

13 $x \neq -1, 0$

Multiplica por $x(x+1)$: $x(x-2) - (x+4)(x+1) = 2x(x+1)$. Al ordenar, $2x^2 + 9x + 4 = 0$. Factoriza o usa la fórmula de segundo grado.

$$2x^2 + 9x + 4 = (2x+1)(x+4) = 0$$

En $x = -1/2$ los denominadores son $1/2$ y $-1/2$; el primer miembro es $-5 - (-7) = 2$. En $x = -4$ son -3 y -4 ; vale $2 - 0 = 2$.

$$S = \left\{-4, -\frac{1}{2}\right\}$$

14 $x \neq 1$

Multiplica por $x-1$: $x(x-1) + 6 = 6(x-1)$. Ordena y resuelve la cuadrática.

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) = 0$$

Para $x = 3$ y $x = 4$, $x-1$ vale 2 y 3. Al sustituir: $3 + 6/2 = 6$ y $4 + 6/3 = 6$.

$$S = \{3, 4\}$$

15 $x \neq -2, 2$

Una fracción definida vale cero cuando su numerador es cero. Los candidatos son $x = 1/2$ y $x = -2$.

$$2x^2 + 3x - 2 = (2x-1)(x+2) = 0$$

Rechaza $x = -2$: anula $x^2 - 4$. En $x = 1/2$, el denominador vale $-15/4$ y el numerador vale 0; sí es solución.

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Soluciones · Ecuaciones

16 $x \neq -2, 2$

Con el denominador común $(x-2)(x+2)$, queda $x^2 + 4x - 4 = 4x$. Los candidatos son $x = -2$ y $x = 2$.

$$x(x+2) + 2(x-2) = 4x \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

Ambos candidatos anulan denominadores originales. No se pueden sustituir en la ecuación: se descartan los dos.

$$S = \emptyset$$

17 $x \neq 1$

Multiplica por $x-1$ y ordena. Prueba las raíces enteras divisoras de 6. Ruffini con -1 da el cociente $x^2 - 5x + 6$, que se factoriza en $(x-2)(x-3)$.

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3) = 0$$

$x-1$ vale $-2, 1$ y 2 en las tres raíces. Sustituyendo en la ecuación original, ambos miembros valen, respectivamente, $-1, 8$ y 11 .

$$S = \{-1, 2, 3\}$$

18 $x \neq 2$

Multiplica por $x-2$ y pasa todo al primer miembro. Ruffini con -2 deja $x^2 - 5x + 6$. Los candidatos son $-2, 2$ y 3 .

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x+2)(x-2)(x-3) = 0$$

Rechaza 2 , que anula el denominador original. Para -2 y 3 , los denominadores son -4 y 1 ; las fracciones originales valen $-8/(-4) = 2$ y $2/1 = 2$.

$$S = \{-2, 3\}$$

19 $x \neq -3$

Elimina $x+3$ y resta el segundo miembro. Ruffini con -1 da $2x^2 - 7x + 3$. Sus raíces son $1/2$ y 3 .

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x+1)(2x-1)(x-3) = 0$$

Los denominadores son $2, 7/2$ y 6 . En cada raíz el numerador coincide con el denominador, por lo que la fracción original vale 1 .

$$S = \{-1, \frac{1}{2}, 3\}$$

20 $x \neq -1, 1$

Elimina $x^2 - 1$ y ordena. Ruffini con 1 deja $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. La raíz 1 es doble, pero eso no la hace válida.

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0$$

Rechaza 1 porque anula $x^2 - 1$. En $x = -2$, el numerador y el denominador valen 3 , de modo que la fracción original vale 1 .

$$S = \{-2\}$$