

Enunciados

01 Sustituir cuando se puede

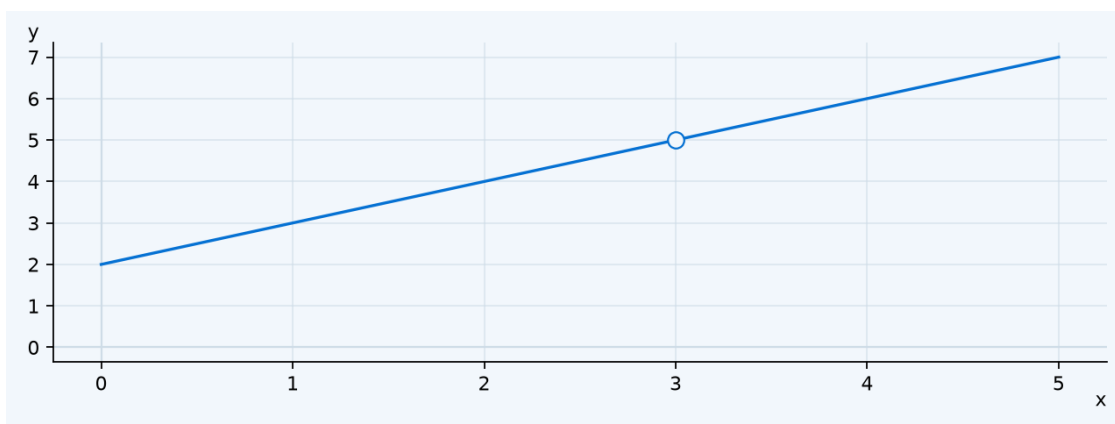
1.º Bachillerato · Ciencias · ~3 min · [Practicar online](#)

Calcula el límite de $(2x^2 - x + 1)/(x + 2)$ cuando x tiende a 1. Justifica la sustitución directa.

02 El hueco de una función

1.º Bachillerato · Ciencias · ~4 min · [Practicar online](#)

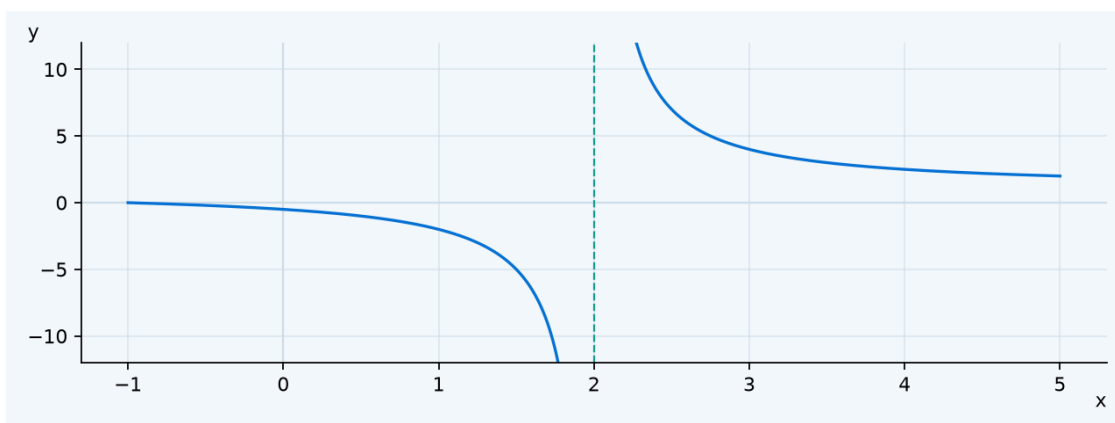
Calcula el límite de $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ cuando x tiende a 3. Explica por qué puede existir aunque la función no esté definida en 3.



03 Un polo y dos lados

1.º Bachillerato · Ciencias · ~5 min · [Practicar online](#)

Calcula los límites por la izquierda y por la derecha de $(x + 1)/(x - 2)$ cuando x tiende a 2. Decide si existe el límite bilateral.



04 Una raíz en el numerador

1.º Bachillerato · Ciencias · ~4 min · [Practicar online](#)

Calcula el límite de $(\sqrt{x + 5} - 3)/(x - 4)$ cuando x tiende a 4, sin utilizar l'Hôpital.

05 Comparar grados y asíntotas

1.º Bachillerato · Ciencias · ~8 min · [Practicar online](#)

Calcula, cuando x tiende a $+\infty$, los límites de $(3x^2 - 2x + 1)/(2x^2 + 5)$, $(2x + 1)/(x^2 + 1)$ y $(x^3 - 1)/(x^2 + 2)$. Estudia también el tercero en $-\infty$ y determina la asíntota horizontal u oblicua de cada función.

06 La resta de dos infinitos

1.º Bachillerato · Ciencias · ~6 min · [Practicar online](#)

Calcula el límite de $\sqrt{x^2 + 6x} - x$ cuando x tiende a $+\infty$ y cuando tiende a $-\infty$. Justifica si puede usarse el mismo resultado en ambos extremos.

07 Potencias indeterminadas

2.º Bachillerato · Ciencias · ~9 min · [Practicar online](#)

Calcula los límites de $((x + 2)/(x - 1))^x$ cuando x tiende a $+\infty$, de x^x cuando x tiende a 0 por la derecha y de $x^{1/x}$ cuando x tiende a $+\infty$. En cada caso justifica el paso a logaritmos.

08 El límite trigonométrico fundamental

2.º Bachillerato · Ciencias · ~5 min · [Practicar online](#)

Calcula el límite de $\sin(3x)/\tan(2x)$ cuando x tiende a 0. Los ángulos se expresan en radianes. Justifica los límites fundamentales empleados.

09 Un producto indeterminado

2.º Bachillerato · Ciencias · ~5 min · [Practicar online](#)

Calcula el límite de $x \ln(x)$ cuando x tiende a 0 por la derecha. Transforma el producto en un cociente y justifica el método.

10 Una resta que oculta otra forma

2.º Bachillerato · Ciencias · ~6 min · [Practicar online](#)

Calcula el límite de $1/x - 1/(e^x - 1)$ cuando x tiende a 0. Transforma primero la diferencia y justifica la técnica usada.

11 Ajustar una función a trozos

2.º Bachillerato · Ciencias · ~9 min · [Practicar online](#)

Sea $f(x) = (e^{2x} - 1)/x$ para $x < 0$, $f(0) = b$ y $f(x) = a + x$ para $x > 0$. Determina a y b para que f sea continua en 0. Comprueba si con esos valores también es derivable.

12 Una cancelación de orden superior

2.º Bachillerato · Ciencias · ~8 min · [Practicar online](#)

Calcula el límite de $(x - \sin(x))/[x(1 - \cos(x))]$ cuando x tiende a 0. Justifica la indeterminación y cada aplicación de l'Hôpital si usas ese método; no se exige Taylor.

Soluciones razonadas

01 Sustituir cuando se puede

Los polinomios son continuos y el denominador vale 3 en $x = 1$. El cociente es continuo allí. El límite es $(2 - 1 + 1)/3 = 2/3$.

Resultado: $2/3$

02 El hueco de una función

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Para x distinto de 3, el cociente es $x + 2$; por tanto el límite es 5. Un límite depende del comportamiento cerca del punto, no de su valor en el propio punto.

Resultado: 5

03 Un polo y dos lados

Por la izquierda el denominador tiende a cero negativo y el cociente a $-\infty$; por la derecha, a $+\infty$. No existe un límite bilateral, tampoco un único límite infinito. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Resultado: Izquierda $-\infty$; derecha $+\infty$; bilateral no existe

04 Una raíz en el numerador

Tras racionalizar, para x distinto de 4 resulta $1/(\sqrt{x+5} + 3)$. Su límite es $1/6$. El dominio $x \geq -5$ contiene un entorno de 4, así que el límite es bilateral.

Resultado: $1/6$

05 Comparar grados y asíntotas

Los límites en $+\infty$ son $3/2$, 0 y $+\infty$. En $-\infty$ el tercero es $-\infty$. Las primeras dos funciones tienen asíntotas horizontales $y = 3/2$ e $y = 0$ en ambos extremos. Para la tercera, $f(x) - x = (-2x - 1)/(x^2 + 2)$, que tiende a 0 en $\pm\infty$. Su asíntota oblicua es $y = x$.

Resultado: $3/2$; 0 ; $\pm\infty$; asíntotas $y = 3/2$, $y = 0$, $y = x$

06 La resta de dos infinitos

En $+\infty$, racionalizar da $6x/(\sqrt{x^2 + 6x} + x)$, cuyo límite es $6/(1 + 1) = 3$. En $-\infty$, $\sqrt{x^2 + 6x} = -x\sqrt{1 + 6/x}$, por lo que la expresión es $-x(\sqrt{1 + 6/x} + 1)$ y tiende a $+\infty$. El dominio $x \leq -6$ o $x \geq 0$ permite ambos extremos.

Resultado: En $+\infty$: 3; en $-\infty$: $+\infty$

07 Potencias indeterminadas

Los logaritmos son $x \ln(1 + 3/(x - 1))$, $x \ln x$ y $(\ln x)/x$. El primero tiende a 3 usando $\ln(1 + u)/u \rightarrow 1$. El segundo tiende a 0 al escribir $\ln x/(1/x)$ y aplicar l'Hôpital: $(1/x)/(-1/x^2) = -x \rightarrow 0$. El tercero tiende a 0 por l'Hôpital: $(1/x)/1 \rightarrow 0$. Los límites originales son e^3 , 1 y 1. Son formas 1^∞ , 0^0 e ∞^0 , pero ninguna de esas formas decide por sí sola el resultado.

Resultado: e^3 ; 1; 1

08 El límite trigonométrico fundamental

$\sin(3x)/(3x) \rightarrow 1$ y $\tan(2x)/(2x) \rightarrow 1$. El cociente original es $(3/2) \cdot [\sin(3x)/(3x)]/[\tan(2x)/(2x)]$, por lo que tiende a $3/2$. La fórmula fundamental exige radianes.

Resultado: $3/2$

09 Un producto indeterminado

En el dominio $x > 0$, $\ln(x)/(1/x)$ tiene forma $-\infty/\infty$. l'Hôpital da el cociente $(1/x)/(-1/x^2) = -x$, cuyo límite es 0. Por tanto $x \ln(x) \rightarrow 0$, desde valores negativos. No se aplica l'Hôpital directamente a un producto.

Resultado: 0

10 Una resta que oculta otra forma

El cociente unificado es $(e^x - 1 - x)/[x(e^x - 1)]$, de forma $0/0$. Una aplicación de l'Hôpital da $(e^x - 1)/[(e^x - 1) + xe^x]$, aún $0/0$. La segunda da $e^x/(2e^x + xe^x)$, que tiende a $1/2$. Los denominadores no se anulan en un entorno perforado suficientemente pequeño, y se cumplen las condiciones de l'Hôpital.

Resultado: $1/2$

11 Ajustar una función a trozos

El límite izquierdo es 2, por l'Hôpital, y el derecho es a . La continuidad exige $a = b = 2$. La derivada por la derecha vale 1. Por la izquierda, el cociente incremental es $(e^{2h} - 1 - 2h)/h^2$; aplicando l'Hôpital dos veces, su límite es 2. Como 2 no es 1, la función continua obtenida no es derivable en 0.

Resultado: $a = b = 2$; no derivable

12 Una cancelación de orden superior

Es $0/0$. La primera derivación da $(1 - \cos x)/(1 - \cos x + x \sin x)$, también $0/0$. La segunda da $\sin x/(2 \sin x + x \cos x)$, de nuevo $0/0$. La tercera da $\cos x/(3 \cos x - x \sin x)$, cuyo límite es $1/3$. Los denominadores derivados no se anulan en un entorno perforado suficientemente pequeño de cero; la regla se aplica en ambos lados.

Resultado: $1/3$