Reales, radicales y logaritmos

Conserva los datos originales. Trabaja en los reales. Log sin base indicada significa base 10.

1. Conjuntos numéricos

Clasifica en N, Z, Q e irracionales. En 1c no se indica el patrón; en 1d se repite el 6.

1a $-\sqrt{49}$

1b $\sqrt[3]{125}$

1c $-0{,}987654\ldots$

1d $0{,}21366666\ldots$

1e 2π

1f $3{,}6$

1g $(-5)^2$

1h $-\frac{7}{3}$

2. Unión e intersección de intervalos

Calcula A ∩ B y A ∪ B, tanto en intervalo como en desigualdad.

2a $A = [-3, 6), \quad B = (2, \infty)$

2b $A = [0, 2{,}5), \quad B = (-\infty, 4)$

2c $A = (-\infty, -2), \quad B = (-2, \infty)$

2d $A = (-5, 4], \quad B = [4, 5]$

3. Inecuaciones con valor absoluto

3a $|5x - 2| > 8$

3b $|-2x + 1| \leq 3$

4. Simplificación de radicales

4a $\sqrt[12]{125}$

4b $\sqrt[18]{x^6}$

4c $\sqrt[8]{0{,}0016}$

4d $\dfrac{\sqrt[9]{1024}}{\sqrt[5]{128}}$

4e $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$

4f $\sqrt[6]{0{,}001}$

4g $\sqrt[8]{16y^2}$

4h $\sqrt[6]{\sqrt[3]{25}}$

4i $\sqrt[8]{2\sqrt[4]{8}}$

4j $\dfrac{\sqrt{5\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{\sqrt{50}}}$

Reales, radicales y logaritmos

5. Extracción de factores

5a $\sqrt[3]{27a^4b^5}$

5b $\sqrt{\frac{32a^7}{25b^2}}$

5c $\sqrt{\frac{343}{a^3}}$

6. Racionalización

6a $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

6b $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

6c $\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$

6d $\frac{6}{\sqrt{7}-2}$

6e $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

7. Cálculo de logaritmos

7a $\log_2 512$

7b $\log(0{,}00001)$

7c $\log_3\left(\frac{1}{243}\right)$

7d $\log_{\sqrt{3}} 27$

7e $\log_3 \sqrt{27}$

7f $\log_2 \sqrt{8}$

7g $\log_\pi 1$

7h $\ln\sqrt[5]{e^2}$

8. Relaciones logarítmicas

8a $\log x = 3 - 4\log z + \frac{1}{2}\log y$

8b $\ln x = 2 - 3\ln z - \frac{2}{3}\ln y$

9. Desarrollo de logaritmos

9a $\log\left(\frac{a^4\sqrt[5]{b^3}}{10\sqrt{c^3}}\right)$

9b $\ln\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}\,e^3}{\sqrt{y}}\right)$

9c $\log\sqrt[3]{\frac{0{,}001A^2B}{1000\sqrt{AB}}}$

Soluciones razonadas

1. Conjuntos numéricos

1a. Una raíz con signo menos

$$-7$$

$\sqrt{49} = 7$, por tanto $-\sqrt{49} = -7$. Es entero y racional, pero no natural. El menor conjunto de la lista que lo contiene es Z.

1b. La raíz cúbica exacta

$$5$$

Como $5^3 = 125$, $\sqrt[3]{125} = 5$. Pertenece a N, Z y Q. El conjunto más pequeño de los propuestos es N.

1c. Un decimal sin patrón indicado

No determinado

La escritura −0,987654… no especifica cómo continúa. Puede completarse de forma periódica y ser racional, o de forma no periódica y ser irracional. No basta un comienzo decimal para decidir. No es natural ni entero. Si se pretendía un período, hay que señalarlo expresamente.

1d. Un decimal periódico mixto

$$\frac{641}{3000}$$

El 6 se repite indefinidamente después de 213. Es periódico mixto: (2136 − 213)/9000 = 1923/9000 = 641/3000. Es racional, pero no entero.

1e. Un múltiplo de pi

$$2\pi$$

Si 2π fuera racional, al dividir entre 2 también lo sería π, lo cual es falso. Por tanto, 2π es irracional.

1f. Un decimal finito

$$\frac{18}{5}$$

3,6 = 36/10 = 18/5. Es racional no entero. Todo decimal exacto puede escribirse como una fracción.

1g. Un cuadrado de base negativa

$$25$$

$(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$. Es natural y, por inclusión, también entero y racional. No es lo mismo que $-5^2 = -25$.

1h. Una fracción negativa

$$-\frac{7}{3}$$

−7/3 es cociente de enteros con denominador no nulo. Como 3 no divide a 7, no es entero: es racional no entero.

2. Unión e intersección de intervalos

2a. Intervalos que se solapan

$$A \cap B = (2, 6), \quad A \cup B = [-3, \infty)$$

La parte común exige $x > 2$ y $x < 6$: $A \cap B = (2, 6)$. Al reunir ambos se cubre desde −3, incluido, hacia la derecha sin límite: $A \cup B = [-3, \infty)$, equivalente a $x \geq -3$.

Soluciones razonadas

2b. Un intervalo contenido en otro

$$A \cap B = [0, 2{,}5), \quad A \cup B = (-\infty, 4)$$

Todo A está contenido en B. La intersección es A: 0 ≤ x < 2,5. La unión es B: x < 4. El 0 se incluye en la intersección; 2,5 y 4 quedan excluidos en sus extremos respectivos.

2c. La recta salvo un punto

$$A \cap B = \varnothing, \quad A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

No hay números que sean simultáneamente menores y mayores que −2: A ∩ B = ∅, sin soluciones. La unión es (−∞, −2) ∪ (−2, ∞), equivalente a x < −2 o x > −2, es decir, x ≠ −2. No se puede cerrar el hueco del −2.

2d. Dos intervalos que se tocan

$$A \cap B = \{4\}, \quad A \cup B = (-5, 5]$$

El 4 pertenece a ambos, y es el único punto común: A ∩ B = {4} = [4,4], equivalente a x = 4. La unión cubre −5 < x ≤ 5: (−5,5].

3. Inecuaciones con valor absoluto

3a. Valor absoluto mayor que ocho

$$\left(-\infty, -\tfrac{6}{5}\right) \cup (2, \infty)$$

|5x − 2| > 8 equivale a 5x − 2 < −8 o 5x − 2 > 8. De aquí, x < −6/5 o x > 2. Los extremos no se incluyen porque la desigualdad es estricta.

3b. Valor absoluto acotado

$$[-1, 2]$$

−3 ≤ −2x + 1 ≤ 3. Restando 1: −4 ≤ −2x ≤ 2. Al dividir entre −2 se invierten las desigualdades: 2 ≥ x ≥ −1. La solución es [−1,2], con ambos extremos incluidos.

4. Simplificación de radicales

4a. Reducir el índice de una raíz

$$\sqrt[4]{5}$$

125 = 5^3. Entonces $\sqrt[12]{125} = 5^{3/12} = 5^{1/4} = \sqrt[4]{5}$.

4b. Una raíz par y el signo de x

$$\sqrt[3]{|x|}$$

La raíz de índice par siempre es no negativa. Como $x^6 = |x|^6$, $\sqrt[18]{(x^6)} = |x|^{6/18} = \sqrt[3]{|x|}$. $\sqrt[3]{x}$ no sirve si x < 0. Dominio: todos los reales.

4c. Una raíz de un decimal exacto

$$\frac{\sqrt{5}}{5}$$

0,0016 = 16/10000 = 1/625 = 5^{-4}. Su raíz octava es $5^{-1/2} = 1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$.

4d. Dividir raíces de distinto índice

$$2^{-13/45}$$

1024 = 2^{10} y 128 = 2^7. El cociente es $2^{10/9 - 7/5} = 2^{(50 - 63/45)} = 2^{-13/45}$. Equivale a $1/(\sqrt[45]{8192})$.

Soluciones razonadas

4e. Tres raíces anidadas

$$\sqrt[9]{32}$$

Desde dentro: $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$; $\sqrt{(2\sqrt[3]{2})} = 2^{2/3}$. Al multiplicar por 2 queda $2^{5/3}$, cuya raíz cúbica es $2^{5/9} = {}^{9}\sqrt{32}$.

4f. Raíz sexta de una milésima

$$\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$0{,}001 = 10^{-3}$. La raíz sexta es $10^{-3/6} = 10^{-1/2} = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

4g. Un cuadrado bajo una raíz octava

$$\sqrt[4]{4|y|}$$

$16y^2 = (4|y|)^2$ y $4|y| \geq 0$. Por tanto, ${}^{8}\sqrt{(16y^2)} = {}^{4}\sqrt{(4|y|)}$. No se puede sustituir $|y|$ por y si $y < 0$. Dominio: todos los reales.

4h. Una raíz dentro de otra

$$\sqrt[9]{5}$$

Al componer raíces se multiplican sus índices: $25^{1/18} = (5^2)^{1/18} = 5^{1/9} = {}^{9}\sqrt{5}$.

4i. Producto bajo una raíz octava

$$\sqrt[32]{128}$$

${}^{4}\sqrt{8} = 2^{3/4}$. El producto interior es $2^{7/4}$. Su raíz octava es $2^{7/32} = {}^{32}\sqrt{128}$.

4j. Cociente de raíces anidadas

$$\sqrt[6]{10}$$

El numerador es $5^{1/2}\cdot 2^{1/3}$. El denominador es $50^{1/6} = 2^{1/6}\cdot 5^{1/3}$. Al restar exponentes queda $2^{1/6}\cdot 5^{1/6} = {}^{6}\sqrt{10}$.

5. Extracción de factores

5a. Extraer cubos perfectos

$$3ab\sqrt[3]{ab^2}$$

$27a^4b^5 = (3ab)^3\cdot ab^2$. La raíz cúbica permite sacar $3ab$ conservando su signo: $3ab\cdot\sqrt[3]{(ab^2)}$. No hacen falta valores absolutos al extraer una potencia de una raíz impar. Dominio: a y b reales.

5b. Extraer factores de un cociente

$$\frac{4a^3\sqrt{2a}}{5|b|}$$

Para que exista en los reales: $a \geq 0$ y $b \neq 0$. Escribimos $32a^7 = 16a^6\cdot 2a$ y $\sqrt{(25b^2)} = 5|b|$. Como $a \geq 0$, $\sqrt{(a^6)} = a^3$. Resultado: $4a^3\sqrt{(2a)}/(5|b|)$.

5c. Una variable en el denominador radical

$$\frac{7\sqrt{7a}}{a^2}, \quad a > 0$$

El cociente $343/a^3$ debe ser positivo y estar definido, así que $a > 0$. Separando $343 = 49\cdot 7$ y $a^3 = a^2\cdot a$ resulta $7\sqrt{7}/(a\sqrt{a})$. Racionalizando con $\sqrt{a}$: $7\sqrt{(7a)}/a^2$.

Soluciones razonadas

6. Racionalización

6a. Un radical en el denominador

$$\frac{4-\sqrt{6}}{2}$$

Multiplicamos numerador y denominador por √2. Queda (4 − √6)/2 = 2 − √6/2. El primer término es 2, no 4.

6b. Simplificar antes de racionalizar

$$1-\sqrt{2}$$

Dividimos cada término por √5: √5/√5 = 1 y √10/√5 = √2. Resultado: 1 − √2. También se obtiene multiplicando por √5/√5.

6c. Usar el conjugado de una diferencia

$$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$$

El conjugado es √8 + √3. El denominador pasa a 8 − 3 = 5; el numerador es √8 + √3 = 2√2 + √3. Resultado: (2√2 + √3)/5.

6d. Conjugado con un término entero

$$2\sqrt{7}+4$$

Multiplicamos por (√7 + 2)/(√7 + 2): 6(√7 + 2)/(7 − 4) = 2(√7 + 2) = 2√7 + 4.

6e. Racionalizar un denominador negativo

$$-\frac{5\sqrt{2}+6\sqrt{5}}{13}$$

El conjugado es √5 + 3√2. El denominador vale 5 − 18 = −13. El numerador es √50 + 3√20 = 5√2 + 6√5. Resultado: −(5√2 + 6√5)/13. El signo negativo coincide con el denominador original.

Soluciones razonadas

7. Cálculo de logaritmos

7a $\log_2 512 = 9$

512 = 2^9. Por definición, $\log_2 512 = 9$.

7b $\log(0{,}00001) = -5$

Sin base indicada, log se toma en base 10. Como 0,00001 = 10^{-5}, el resultado es −5.

7c $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$

243 = 3^5 y 1/243 = 3^{-5}. Por tanto, $\log_3(1/243) = -5$.

7d $\log_{\sqrt{3}} 27 = 6$

Si $(\sqrt{3})^x = 27$, entonces $3^{x/2} = 3^3$. Así, x/2 = 3 y x = 6.

7e $\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$

$\sqrt{27} = 3^{3/2}$. El logaritmo en base 3 es 3/2.

7f $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

$\sqrt{8} = 2^{3/2}$. Por tanto, $\log_2(\sqrt{8}) = 3/2$.

7g $\log_\pi 1 = 0$

π es positivo y distinto de 1, por lo que es una base válida. Como $\pi^0 = 1$, log_π 1 = 0.

7h $\ln\sqrt[5]{e^2} = \frac{2}{5}$

$\sqrt[5]{(e^2)} = e^{2/5}$. El logaritmo natural deshace la exponencial: $\ln(e^{2/5}) = 2/5$.

8. Relaciones logarítmicas

8a. Despejar una relación logarítmica

$$x = \frac{1000\sqrt{y}}{z^4}$$

Todos los logaritmos son decimales y x, y, z > 0. Escribimos 3 = log 1000, −4 log z = −log(z^4) y (1/2) log y = log√y. Así, log x = log(1000√y/z^4) y x = 1000√y/z^4.

8b. Despejar con logaritmos naturales

$$x = \frac{e^2}{z^3 y^{2/3}}$$

Con x, y, z > 0, escribimos 2 = ln(e^2). Las restas de logaritmos se convierten en divisiones: ln x = ln(e^2/(z^3·$y^{2/3}$)). Al aplicar la exponencial, x = e^2/(z^3·$y^{2/3}$).

9. Desarrollo de logaritmos

9a. Desarrollar un logaritmo con raíces

$$4\log|a| + \tfrac{3}{5}\log b - 1 - \tfrac{3}{2}\log c$$

Dominio real: a ≠ 0, b > 0 y c > 0. El denominador exige c > 0; el argumento positivo exige b > 0 y a ≠ 0. log(a^4) = 4 log|a|, log($\sqrt[5]{b^3}$) = (3/5) log b, log 10 = 1 y log($\sqrt{c^3}$) = (3/2) log c. Al ser un cociente, se restan los términos del denominador. Si además a > 0, puede escribirse 4 log a.

9b. Un producto con e dentro de ln

$$\tfrac{3}{4}\ln x + 3 - \tfrac{1}{2}\ln y$$

El dominio es x > 0 e y > 0: los ceros no se permiten dentro del logaritmo ni en el denominador. Separando producto y cociente: ln($x^{3/4}$) + ln(e^3) − ln($y^{1/2}$) = (3/4) ln x + 3 − (1/2) ln y.

9c. Constantes y variables bajo una raíz

$$-2 + \tfrac{1}{2}\log A + \tfrac{1}{6}\log B$$

El denominador exige AB > 0 y la positividad del argumento exige B > 0; por tanto, A > 0 y B > 0. El cociente interior es 10^{-6}·$A^{3/2}$·$B^{1/2}$. La raíz cúbica lo transforma en 10^{-2}·$A^{1/2}$·$B^{1/6}$. Al tomar logaritmos resulta −2 + (1/2) log A + (1/6) log B.