PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección

4 de junio de 2016

Nombre:…………………………………………………………....................................

Apellidos:………………………………………………………….................................

Fecha de nacimiento:………………………………………….................................

Teléfonos:………………………………………………………...................................

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

- ☐ A través de tu colegio.
- ☐ A través del *Concurso de Primavera*.
- ☐ A través de otros medios.

Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

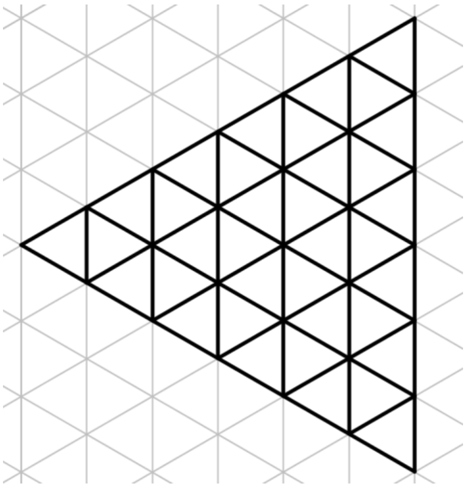
Te deseamos mucho éxito.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales — GOBIERNO DE ESPAÑA, MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD — FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

1. TRIÁNGULOS CON TRIÁNGULOS

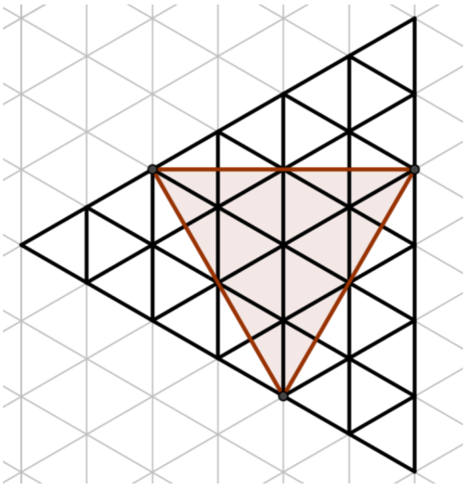
Un triángulo equilátero de área 36 cm^2, está dividido en 36 triangulitos de 1 cm^2, como en las figuras siguientes.

a) Dibuja sobre esta figura un triángulo de área 8 cm^2



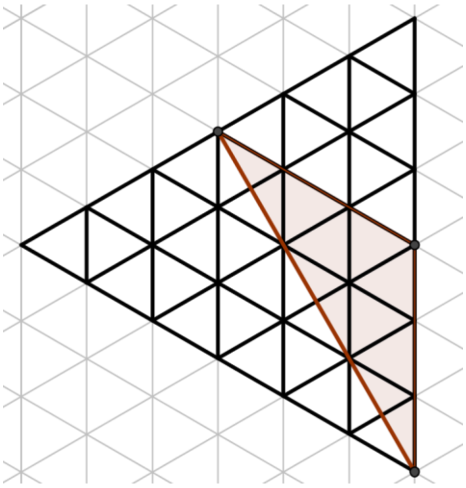
Calcula **razonadamente,** en cada caso, el área de los triángulos sombreados, **explicando cómo lo has hecho:**

b)

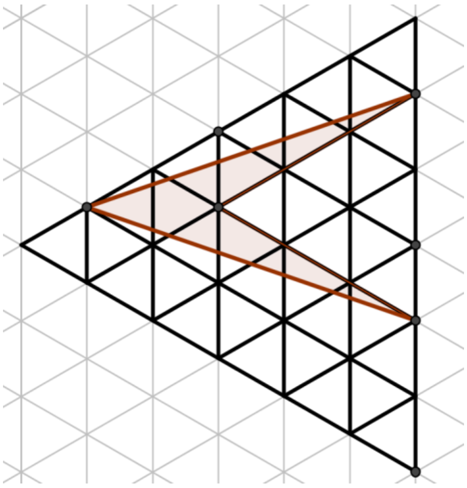


(Continúa detrás)

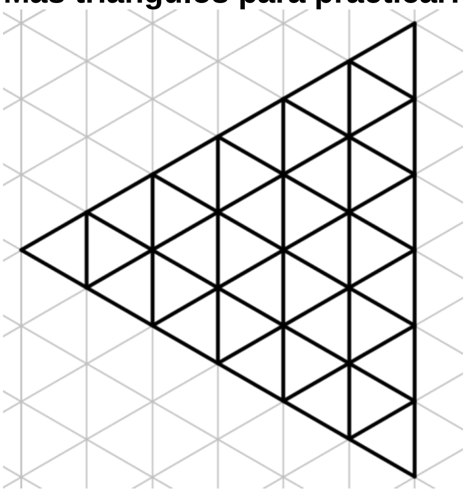
c)

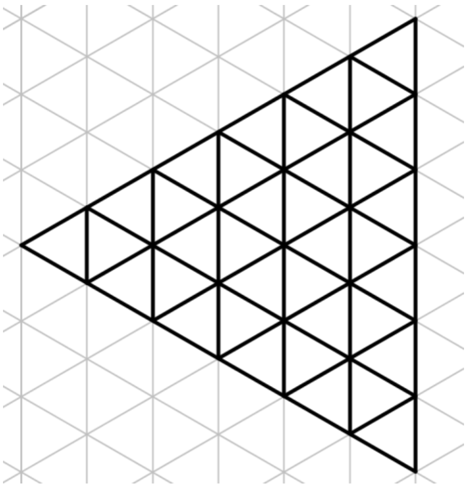


d)

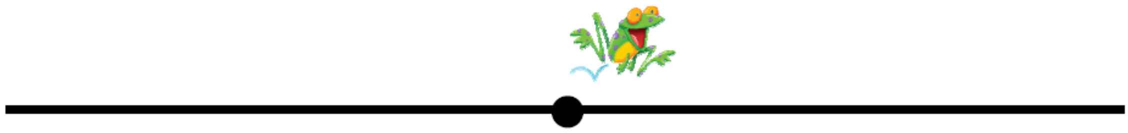


Más triángulos para practicar:





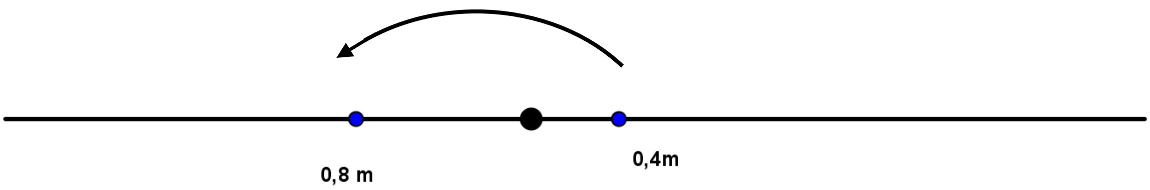
2. LA RANA SALTARINA



En esta línea recta hay una rana que salta, alternadamente hacia la derecha y hacia la izquierda del punto negro, sin caer nunca en él. Lo hace de la siguiente forma:

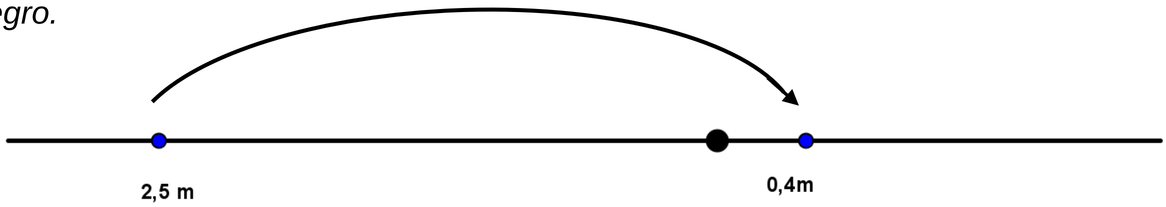
- Si la rana se encuentra a una distancia ***d*** inferior o igual a un metro del punto negro, tras dar su siguiente salto estará sobre la recta al doble de esa distancia del punto negro, o sea a ***2d*** metros, pero en el lado opuesto.

Por ejemplo, si la rana está a la derecha del punto negro a una distancia d = $\frac{2}{5}$ *= 0,4 m, dará el salto a la izquierda para caer a una distancia 2d =* $\frac{4}{5}$ *= 0,8 m del punto negro.*



- Si la rana se encuentra a una distancia d superior a un metro del punto negro, tras dar su siguiente salto estará sobre la recta a una distancia igual a 1/d del punto negro, pero en el lado opuesto.

Por ejemplo, si la rana está a la izquierda del punto negro a una distancia d=$\frac{5}{2}$*=2,5 m, dará el salto a la derecha para caer a una distancia* $\frac{1}{d}=\frac{2}{5}=0{,}4$ *m del punto negro.*



Pues bien, responde a las siguientes preguntas y en todas tus respuestas indica a qué distancia y en qué lado del punto negro se encontrará la rana:

a) Si inicialmente estaba a la izquierda del punto negro y a una distancia de 0,05 metros, ¿dónde se encontrará exactamente tras dar dos saltos?

(Continúa detrás)

b) ¿Y dónde se encontrará exactamente tras dar cinco saltos?

c) ¿Y tras dar diez saltos?

d) No te asustes, piensa un poco: ¿Y tras 2016 saltos? Explica tu respuesta.

e) Ahora queremos que nos digas en qué lado del punto negro y a qué distancia de él empezó la rana su periplo saltarín si después de **tres** saltos la rana se encuentra a la derecha y a 0,8 m del punto negro. **Indica razonadamente todas las soluciones posibles.**

3. EN LA PAPELERÍA

En una papelería venden estuches de tres tamaños, pequeños, medianos y grandes. Los precios son números enteros positivos, es decir no tienen decimales y están ordenados de acuerdo con el tamaño de los estuches.

Por ejemplo, unos precios válidos serían que un estuche pequeño costara 5 euros, uno mediano 8 euros y uno grande 9 euros. Y ejemplos de precios que **no** valen son: que un estuche cualquiera cueste 8,75 euros o que uno pequeño cueste 6 euros si el mediano cuesta 4 euros.

María, Ana y Elena fueron ayer a la papelería y compraron 9 estuches pequeños, 6 medianos y 8 grandes para regalar a toda su clase.

a) ¿Cuánto les costarían los estuches si los precios son 2, 4 y 5 euros? Intenta dar una expresión general para cualquier precio de los estuches.

Cuando recibieron la cuenta se produjo la siguiente conversación:

María dijo: mira, el total es un número par.

Ana dijo: y también es un múltiplo de tres.

Elena dijo: entre las tres tenemos que pagar menos de 90 euros.

b) ¿Puede haber un estuche pequeño que cueste 3 euros?

c) ¿Puede haber un estuche grande que cueste 5 euros?

(**Continúa detrás**)

d) ¿Puede haber un estuche mediano que cueste 10 euros?

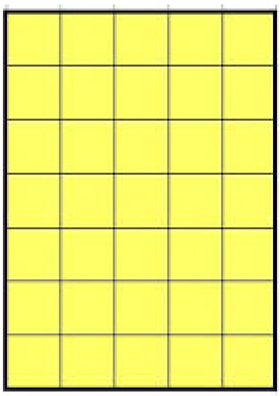
e) El precio de un estuche pequeño no puede ser cualquier número. ¿Qué condición tiene que cumplir el precio de un estuche pequeño?

f) El precio de un estuche grande tampoco puede ser cualquier número. ¿Qué condición tiene que cumplir el precio de un estuche grande?

g) ¿Puede haber un estuche grande que cueste 9 euros?

h) Podrías decirnos exactamente ¿cuánto cuesta cada estuche?

4. RECTÁNGULOS Y BLOQUES



Carlos, Diana y Elena ponen fichas cuadradas sobre una mesa formando rectángulos, cuyos lados quedan orientados a los cuatro puntos cardinales. Tienes un ejemplo en la figura de la derecha.

a) Carlos, Diana y Elena han construido un rectángulo, distinto y mayor que el de la figura. Una vez hecho, Carlos se lleva a su bolsillo las 7 fichas del rectángulo que estaban en el lado sur. Después, del nuevo rectángulo que ha quedado con las fichas restantes, Diana suprime las fichas del lado este, que son 10. Si a continuación Elena quiere recoger las fichas del lado Norte ¿cuántas serán? Y después de que Elena las recoja, ¿cuántas fichas quedarán sobre la mesa?

b) ¿Crees que si se empieza con otros rectángulos, de manera que se cambien los números 7 y 10 por otros números, siempre se podrá saber cuántas fichas recoge Elena y cuántas quedan al final sobre la mesa?

c) Ahora Carlos, Diana y Elena construyen bloques con un montón de pequeños cubos, como en la figura de la derecha.

Carlos, Diana y Elena construyen ahora un bloque, distinto y mayor que el de la figura.

Carlos separa todos los cubos de la cara frontal y se da cuenta que son 77.

Después Diana quita todos los cubos que quedan en la cara de la derecha y son 55.

(**Continúa detrás**)

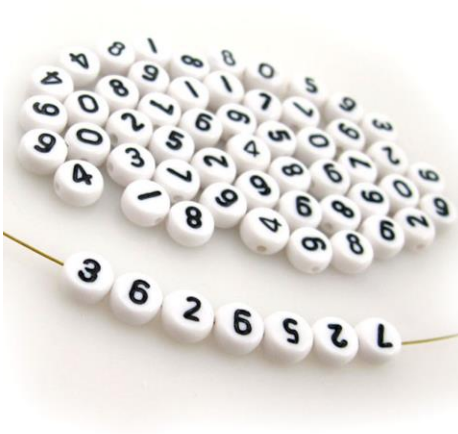
Si a continuación Elena quiere eliminar todos los cubos que quedan en la cara superior, ¿puedes deducir cuántos serán?

¿Cuántos cubos quedarán en el bloque formado por los cubos restantes después de que Carlos, Diana y Elena supriman los cubos indicados?

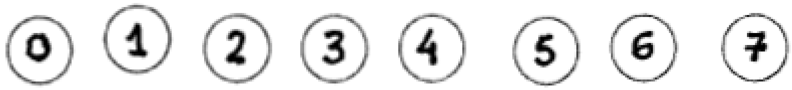
d) Para otro bloque Carlos dice que ha sacado un cierto número de cubos de la cara frontal y después Diana dice otro número para la cara de la derecha. Enseguida Elena dice "estos números de cubos que decís no son posibles". Da un ejemplo de números que erróneamente, puedan haber dicho Carlos y Diana pero que no puedan ser ciertos y explica las razones que te llevan a tu respuesta.

e) En otros casos, para ciertas dimensiones del bloque inicial, no es posible deducir con seguridad cuántos cubos quedan en la cara superior sabiendo los que ha quitado Carlos de la cara frontal y los que ha quitado después Diana de la cara de la derecha, ya que se presentan diversas posibilidades. Busca unos números (para sustituir el 77 y el 55 del apartado c) para los cuáles no sea posible, sólo con estos datos, deducir exactamente el número de cubos que quitará Elena después de que lo hagan Carlos y Diana.

5. PULSERAS



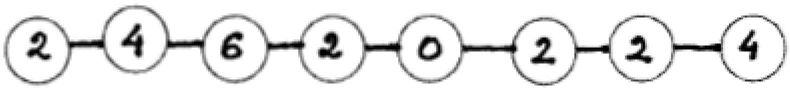
Tienes muchas cuentas, tantas como necesites, numeradas del 0 al 7:

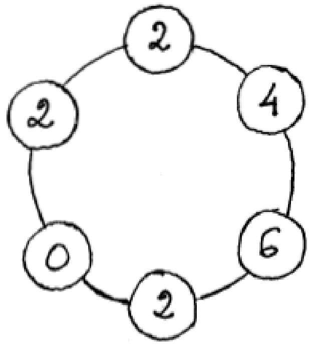


Con ellas vamos a hacer pulseras. Estas son las reglas:

1) Elige dos de ellas para comenzar. Pueden tener el mismo número.
2) Para elegir la tercera, suma los números de la primera y la segunda. Si te sale menos de 8 elige la cuenta con el número que te ha salido. Si te sale 8 o más, réstale 8 y elige la cuenta que te haya salido de la resta.
3) Para elegir la cuarta se hace lo mismo que antes, con la segunda y la tercera cuentas.
4) Continua hasta que se vuelvan a repetir las dos primeras cuentas en el mismo orden que se pusieron al principio.
5) Estas dos cuentas repetidas no se utilizarán para hacer la pulsera y se devuelven al montón.
6) Con las cuentas que quedan unidas, sin cambiar el orden, se confecciona una pulsera.

Aquí tienes un ejemplo comenzando con 2 y 4:





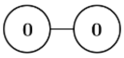
Al repetirse de nuevo el 2 y el 4, este 2 y este 4 se devuelven al montón, y con las cuentas que ya teníamos 2, 4, 6, 2, 0 y 2 se forma una pulsera. Como hay seis cuerdecitas que unen las cuentas, decimos que esta pulsera tiene longitud 6.

Ten en cuenta que como la pulsera es cerrada se puede comenzar por cualquier lugar. Por ejemplo, la pulsera anterior es la misma que la que comienza por 6 y 2, y la misma que si empezamos por 2 y 2.

a) Dibuja la pulsera comenzando con 0 y 1. ¿Qué longitud tiene? Si comienzas por 5 y 5 ¿se obtiene una pulsera diferente?

(**Continúa detrás**)

b) ¿De cuántas formas distintas se puede empezar la pulsera del apartado a)?

c) Quitando la pulsera  ¿Qué longitud tiene la pulsera más pequeña? ¿Por qué?

d) ¿De cuántas formas diferentes se puede comenzar una pulsera?

e) ¿Cuántas pulseras diferentes se pueden hacer? Dibújalas todas y justifica tu respuesta. No dibujes dos pulseras que aunque las hayas comenzado con dos cuentas diferentes sean iguales.

6. LOS CUENTOS DE MI ESTANTERÍA

En mi habitación tengo una estantería, y en una balda, solo en una balda, coloco mi colección de cuentos.

Tengo 4 cuentos, 2 tienen las tapas de color ROJO, uno tiene las tapas de color AZUL y el otro tiene las tapas de color VERDE. Para facilitar nuestra organización y distinguirlos bien en lugar de fijarnos en el título los vamos a llamar así: **R1, R2, A1 y V1**. La letra hace referencia al color y el número sirve para clasificar los cuentos de ese color.

Los cuentos los vamos a colocar en una balda de la estantería de manera que no puede haber **dos cuentos seguidos del mismo color**.

Por ejemplo, una ordenación posible es: **R1, A1, R2, V1.**

Y esta ordenación es distinta de esta otra: **R2, A1, R1, V1** ya que los cuentos de tapas rojas están cambiados entre sí y como tienen títulos distintos es una ordenación distinta.

a) Escribe otra ordenación posible para estos cuatro cuentos sin que haya dos seguidos del mismo color

b) Escribe todas las posibles ordenaciones de estos cuatro cuentos sin que haya dos seguidos del mismo color

c) Mi colección aumenta y ahora tengo 3 cuentos de tapas rojas, uno de tapas azules y uno de tapas verdes: **R1, R2, R3, A1 y V1**. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una balda de manera que no haya dos cuentos juntos del mismo color?

No te pedimos que escribas todas las formas posibles; queremos que digas cuántas maneras de colocar los libros y que expliques como lo has deducido.

(**Continúa detrás**)

Otra vez la colección aumenta y tenemos 3 cuentos de tapas rojas, dos cuentos de tapas azules y uno de tapas verdes: **R1, R2, R3, A1, A2 y V1.**

d) ¿Cuántas formas diferentes tenemos para colocarlos sin que haya dos cuentos seguidos del mismo color si el primer cuento que coloco en la balda es el cuento **R1**?

e) ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar los tres cuentos de tapas rojas, los dos de tapas azules y el de tapas verdes en una balda de manera que no haya dos cuentos seguidos del mismo color?

Tampoco te pedimos que escribas todas las formas posibles, sólo queremos que digas cuántas maneras de colocarlos hay.

f) Si tuviéramos 5 cuentos de tapas rojas, 3 de tapas azules y 2 de tapas verdes ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar sin que haya dos cuentos juntos del mismo color?

NOTA IMPORTANTE, en este apartado no es necesario que hagas todos los productos, basta con que lo dejes indicado.