Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

PROYECTO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

Estímulo del talento matemático

Prueba de selección

3 de junio de 2017

Nombre:……………………………………………………….............................

Apellidos:……………………………………………………..............................

Fecha de nacimiento:…………………………………………….........................

Teléfonos:………………………………………………………........................

Centro en el que estudias:………………………………………………………

Información importante que debes leer antes de comenzar a trabajar

DURACIÓN DE LA PRUEBA: 2 HORAS Y MEDIA

En primer lugar debes mirar todos los ejercicios y después comenzar con los que te parezcan más sencillos. No es necesario que trabajes las tareas en el orden en que se te presentan. Escoge tú mismo el orden que te parezca mejor.

No queremos conocer solamente tus soluciones, sino, sobre todo, tus propios caminos que te han llevado a ellas.

Para ello te hemos propuesto un problema en cada hoja. Puedes utilizar el espacio libre para tus observaciones y cálculos. Si este espacio no te basta, utiliza por favor el reverso de la hoja y si aún te falta, utiliza otra hoja en blanco que nos puedes pedir (en la que debes señalar también el número que aparece en la esquina superior derecha de esta primera hoja). **De ningún modo debes utilizar una misma hoja para cálculos y observaciones que se refieran a dos ejercicios distintos.**

Al final debes entregarnos todos los papeles que hayas utilizado.

Nos interesa conocer las buenas ideas que se te ocurran en la solución de las tareas propuestas. Deberías tratar de describir estas ideas de la manera más clara posible. Para ello nos bastarán unas breves indicaciones. También nos interesan las soluciones parciales de las tareas propuestas.

Además tenemos una curiosidad, **¿cómo te has enterado de esta convocatoria?**

☐ A través de tu colegio.

☐ A través del *Concurso de Primavera*.

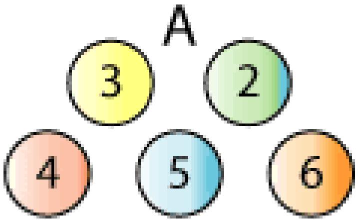
☐ A través de otros medios.

Tienes dos horas y media en total. No deberías emplear demasiado tiempo para un mismo ejercicio. Consejo: utiliza un máximo de 30 minutos para cada ejercicio.

Te deseamos mucho éxito.

1. JUEGO CON BOLAS

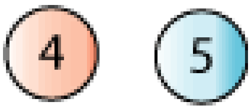
Tenemos una bolsa **A** de bolas numeradas que empleamos para un juego:



Para jugar, las bolas se mezclan y sin mirar se sacan dos al azar.

Si la suma es par, ganas. Si es impar, pierdes.

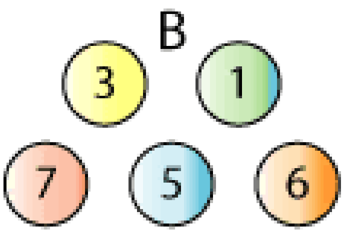
Por ejemplo, si se saca

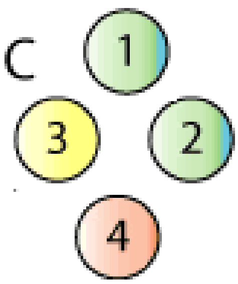


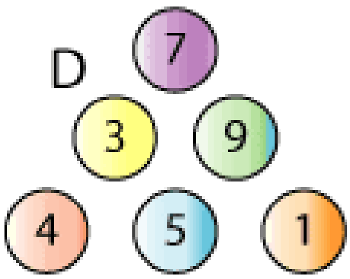
La suma es 4+5=9 y en este caso pierdes.

a) Un juego se dice que es **justo** si el número de parejas que te hacen ganar es el mismo que el número de parejas que te hacen perder. ¿Puedes justificar si el juego con la bolsa A es justo o no?

Tenemos ahora tres nuevas bolsas de bolas: B, C y D:







Continúa detrás

b) Ahora te dejan escoger entre las bolsas B, C y D**.** En cada caso haz el recuento de cuántas parejas de números puedes extraer y cuántas de ellas te hacen ganar. A la vista de tus cálculos, explica cuál de las tres bolsas escogerías para que tu posibilidad de ganar sea la mayor posible.

.

c) ¿Crees que podrías construir una bolsa con bolas numeradas que diese lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

d) ¿Sería posible construir una bolsa con 10 bolas numeradas que diera lugar a un juego justo? Explica tu respuesta.

2. EL PALACIO DE LAS HADAS

Las hadas viven en un palacio que tiene muchos pisos numerados así: 1, 2, 3, 4, 5…………

Para ir de un piso a otro piso hay que utilizar una varita mágica y en cada piso hay dos varitas mágicas, una es roja y la otra es azul.

Si tocas la varita mágica roja puedes ir 10 pisos más arriba o 10 pisos más abajo. Por ejemplo si estás en el piso 37 y tocas la varita roja puedes ir al piso 47 o al piso 27.

También puedes tocar la varita azul. Si la tocas puedes subir a otro piso que es el triple del piso que estás más uno; por ejemplo si estás en el piso 5 puedes ir al piso 16 = 3·5+1. También puedes moverte en sentido contrario, bajar a un piso obtenido restando 1 al que estás y dividiendo por 3; por ejemplo si estás en el piso 13 podrías ir al 4 porque $\frac{13-1}{3} = 4$.

a) El hada del Bosque vive en el piso 1. ¿Crees que podría llegar al piso 13? ¿Podría ir al piso 40? ¿Y al piso 93? ¿Y al piso 57? Si puede llegar a uno de estos pisos explica qué varitas ha tocado y en qué orden. Si crees que no puede llegar explica por qué.

Continúa detrás

b) ¿Podrías decir alguna propiedad que cumplan los números de todos los pisos a los que puede llegar el hada del Bosque?

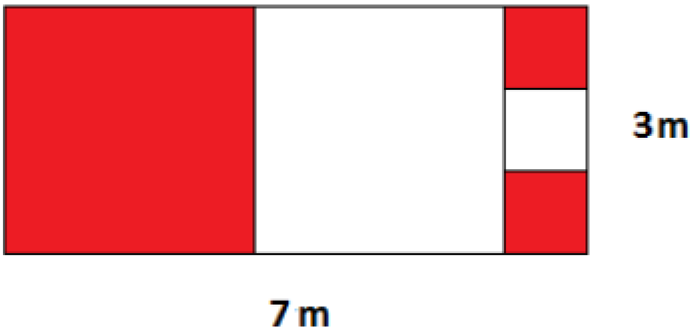
c) El hada de la Luna vive en la planta 2. Describe cómo puede llegar el hada de la Luna a la planta 57.

.

d) El hada del Agua vive en el piso 18. Utilizando la varita roja y la varita azul, ¿podría llegar el hada del Agua al piso 5?

e) ¿Coinciden dos de estas tres hadas en algún piso? Si piensas que **SÍ** dinos el piso, cuáles son las hadas que coinciden en él y como llegarían. Si piensas que **NO** escribe una justificación.

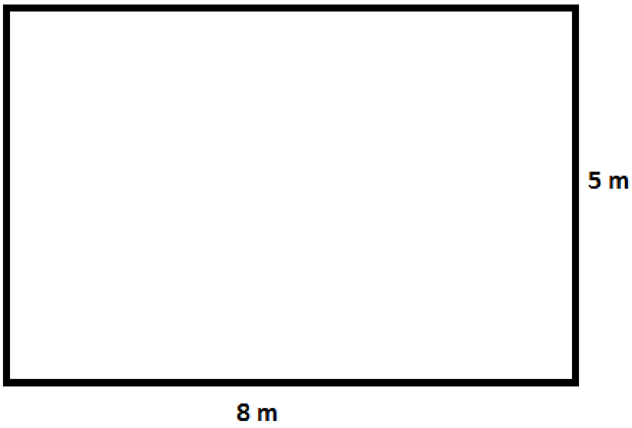
3. EMBALDOSANDO UNA PARED



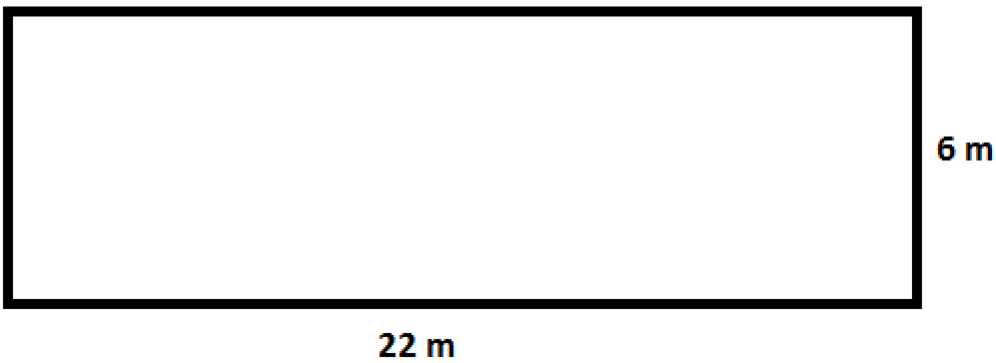
Queremos embaldosar una pared rectangular de 7 m por 3 m, utilizando exclusivamente baldosas cuadradas que tengan longitudes enteras, no necesariamente iguales y con el mínimo número total de ellas.

En este caso, el número mínimo total es de 5 baldosas cuadradas, ya que necesitaríamos 2 baldosas de lado 3 m y 3 baldosas de lado 1 m. Un posible diseño es el que se muestra en la figura de arriba, aunque hay otros.

a) Ahora queremos embaldosar una pared rectangular de 8 m por 5 m, con el mismo criterio anterior, ¿cuántas baldosas cuadradas necesitarías en total y de qué tamaño? **Dibuja algún diseño con ellas como ejemplo**.

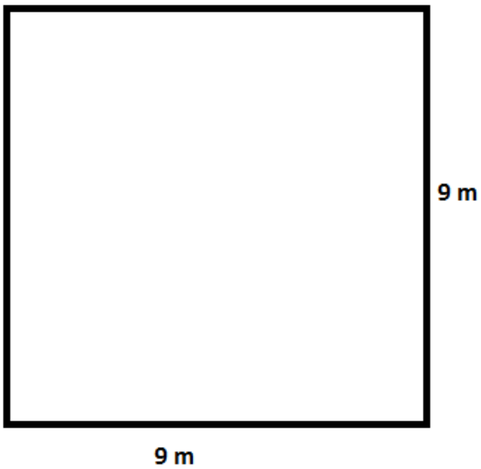


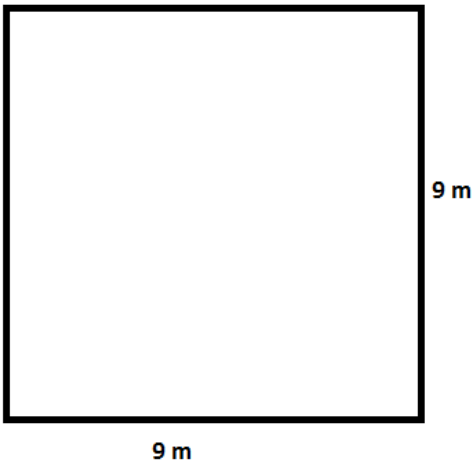
b) Utilizando sólo baldosas cuadradas de lados 2 m, 4 m *y* 6 m, ¿cuál es el mínimo número de baldosas cuadradas necesarias para embaldosar una pared de 22 m por 6 m? Escribe cuántas baldosas hay de cada tamaño. **Dibuja algún diseño con el número de baldosas encontrado.**



Continúa detrás

c) Si ahora la pared es cuadrada de lado 9 m, y sólo disponemos de baldosas cuadradas de lado 1, 2, 4, 5 y 7 m, podemos encontrar ese número mínimo de dos formas distintas. **Encuéntralas y realiza un diseño con cada una de estas dos posibilidades.**

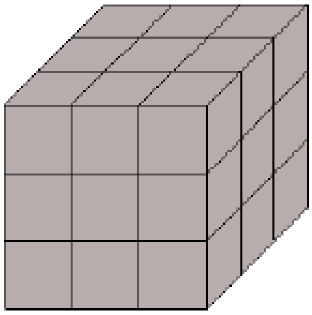


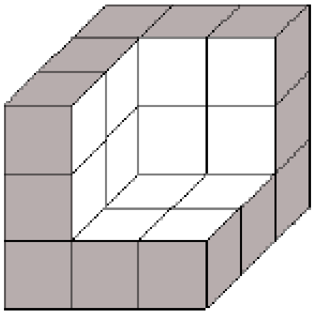


d) Ahora podemos usar baldosas cuadradas de lados enteros (por ejemplo de lado 4) y también baldosas cuadradas de lados decimales con el 5 como único decimal; por ejemplo podemos utilizar baldosas de lado 0,5 m, de 1 m, de 1,5 m, ……, de 16 m y de 16,5 m.

Si tenemos una pared de 371,25 m^2, y para enlosarla usamos una sola baldosa cuadrada de 16,5 m de lado, y las restantes son baldosas más pequeñas, **¿cómo será la distribución del resto de baldosas, buscando siempre el menor número de éstas?**

4. PINTANDO CUBOS Y CUBITOS

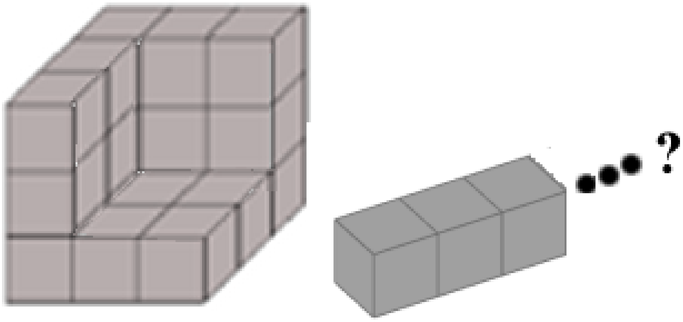




Hemos necesitado exactamente 9 botes de pintura para pintar exteriormente (por todas sus caras, también las que no se ven, como la lateral izquierda, la trasera y la inferior) el cubo de la izquierda que, como se ve, está construido adosando cubitos todos iguales.

Después hemos quitado unos cuantos cubitos para dejar la figura como se ve a la derecha.

a) ¿Cuántos botes de pintura necesitaremos para pintar completamente la parte de la figura que no lo está?



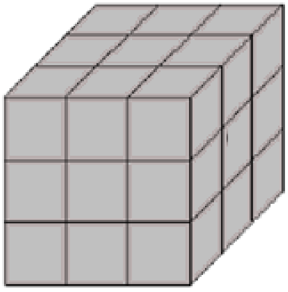
Ahora ya tenemos esta figura pintada exteriormente (recordad que también por la izquierda, por detrás y por debajo). Vamos a desmontarla y adosando algunos cubitos en la posición que nos vaya mejor, queremos construir una fila de cubitos, en la que queremos pintar todas las caras que no lo estén.

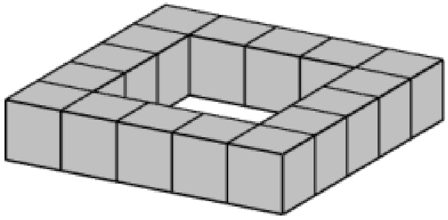
Tenemos un solo bote de pintura como los del apartado a).

b) ¿Cuál es el máximo número de cubitos que podremos poner en la fila para que la podamos pintar completamente? Explica cómo los tienes que colocar.

Continúa detrás

Tenemos otro cubo como el inicial, completo y pintado exteriormente por todas sus caras, lo desmontamos y ahora queremos adosar adecuadamente algunos cubitos (algunos de los cuales tienen caras pintadas) para construir un nuevo objeto: un "cuadrado de cubitos" y pintarlo, como se ve en la figura de la derecha.

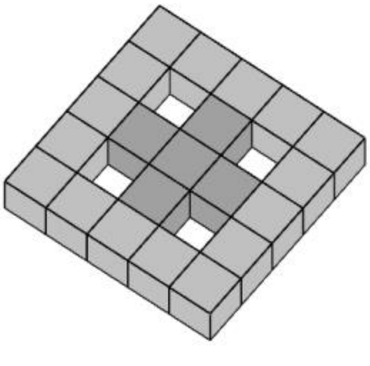




Queremos pintar todas las caras exteriores del nuevo objeto, pero lo podemos montar de manera que aprovechemos piezas con algunas caras pintadas, tantas como sea posible (que ya no volveremos a pintar, naturalmente).

c) Razona cuál es el menor número de caras que deberemos pintar.

Con las piezas que nos han sobrado queremos añadir una cruz al cuadrado y que quede pintada en todo su exterior, como muestra la figura de la derecha.



También la montaremos intentando aprovechar, de los cubitos que nos han quedado sin utilizar, aquellos que tengan caras ya pintadas y que podemos añadir ahora a la construcción.

d) ¿Cuál es el menor número de caras que deberemos pintar en la cruz que añadimos?

5. INTERCAMBIO DE CIFRAS

a) Escribe en orden todos los números que se pueden obtener con todas las cifras del número 123. Fíjate en cada uno de ellos y señala los que con un simple intercambio de dos cifras permiten obtener el número 123.

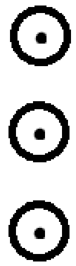
b) Escribe ordenadamente todos los números que se pueden obtener con todas las cifras del número 1234. ¿Cuántos son? Fíjate en cada uno de ellos y señala los que con un simple intercambio de dos cifras permiten obtener el número 1234. ¿Cuántos son?

Continúa detrás

c) ¿Realmente necesitas escribirlos todos los números para poder responder a las cuestiones del apartado anterior? Sin escribirlos todos ¿Cuántos números se podrán obtener con todas las cifras del número 12345? ¿Cuántos de ellos permiten con un simple cambio de dos cifras obtener el número 12345? Explica tu respuesta.

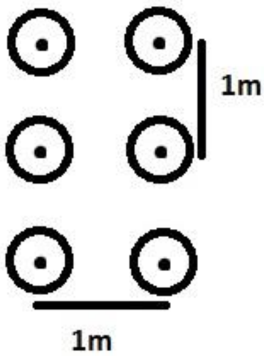
d) ¿Cuáles de los números del apartado b) son los que requieren exactamente dos intercambios de dos cifras para obtener el número 1234? ¿Y tres de dichos intercambios? ¿Alguno de ellos requiere más de tres intercambios?

6. SEMBRANDO SEMILLAS



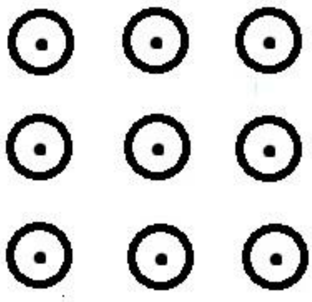
Un agricultor se dispone a sembrar semillas de patata en su terreno.

1. El primer día, el agricultor siembra tres semillas en línea recta separadas 1 metro entre cada dos consecutivas (como se indica en la figura de la derecha).



El segundo día, vuelve a sembrar otras tres semillas en una línea paralela a la anterior a distancia 1 metro y también a distancia 1 metro entre cada nueva semilla.

Tras la siembra del tercer día, el campo queda de la siguiente forma:



a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tiene cada uno de esos cuadrados?

c) Llamamos orden de una semilla como al número de cuadrados que tienen alguno de sus vértices en dicha semilla. ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?

Continúa detrás

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

2. El agricultor sigue cultivando tres semillas cada día con la misma distribución anterior. Tras la siembra del cuarto día,

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tiene cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuál es el orden de cada una de las semillas?

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

3. Si han pasado 100 días, responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tiene cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuál es el orden de cada una de estas semillas?

d) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

4. Si han pasado “n” días (n representa cualquier valor de los días de siembra), responde justificando tu respuesta, a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos cuadrados pueden formarse de modo que las semillas sean sus vértices?

b) ¿Qué área tiene cada uno de esos cuadrados?

c) ¿Cuánto vale la suma de los órdenes de todas las semillas?

Continúa detrás