

Trigonometría

Problemas reales por convocatoria - 1º Bachillerato Ciencias

Cada página procede de una convocatoria oficial o de una recopilación identificada y se conserva como imagen para respetar la notación matemática original.



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
158 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2016

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
- b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

CUESTIÓN A.2: Considere los puntos $P = (2, 7, 3)$, $Q = (1, 2, 5)$ y $R = (-1, -2, 5)$.

- a) [1 punto] Calcule el área del triángulo PQR .
- b) [0,5 puntos] Determine la ecuación general (o implícita) del plano que contiene al triángulo PQR .
- c) [1 punto] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P , está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR .

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

- a) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \right)$.
- b) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$.

CUESTIÓN A.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$.
- b) [1 punto] Determine el área del recinto limitado por el eje OX , las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – SEPTIEMBRE 2017

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

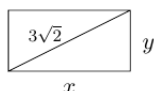
Ejercicio 1

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

- 1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x .
- 2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$.

Ejercicio 2

- 1) [2,5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



- 2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto $(1, 2)$.

Ejercicio 3

Sean $P : x + 3y + 2z - 1 = 0$ y $Q : 2x + 6y + 4z + 3 = 0$ dos planos.

- 1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).
- 2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P .
- 3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q .
- 4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto $(0, 0, 0)$.

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + (a^2 + 2)y + 3z = 3 \\ -2x - (a^2 + 2)y + (a - 3)z = \sqrt{2} - 3 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Comprueba que las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P . Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3. (2 puntos)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int x^2 e^{2x} dx \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{3}$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos(\frac{\pi x}{2})}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN B

B1) Encuentra la matrix X que verifica $7A - A^7 = BB'X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

B2) A , B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$.

Encuentra un punto, D , de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A , B , C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen $6u^3$.
(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Dadas las funciones $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

(3 puntos)



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

- a) Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.

[1 punto]

- b) Resuelva el sistema para el caso $\lambda = 1$.

[1 punto]

2. Considere los planos $\pi_1: 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2: 2x + 3y + z = 5$.

- a) Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 .

[1 punto]

- b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

[1 punto]

3. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$, donde k es un parámetro real distinto de 0. Para los

distintos valores del parámetro k :

- a) Calcule el dominio y las asíntotas de la función.

[1 punto]

- b) Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo.

[1 punto]



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

- a) Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.

[1 punto]

- b) Resuelva el sistema para el caso $\lambda = 1$.

[1 punto]

2. Considere los planos $\pi_1: 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2: 2x + 3y + z = 5$.

- a) Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 .

[1 punto]

- b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

[1 punto]

3. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$, donde k es un parámetro real distinto de 0. Para los

distintos valores del parámetro k :

- a) Calcule el dominio y las asíntotas de la función.

[1 punto]

- b) Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo.

[1 punto]



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, segundo os valores de λ , o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

2. a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3 . Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2€/dm^2 e para a base outro que custa 3€/dm^2 . Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$

3. Dados os planos $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π_1 e π_2 . Se se cortan, calcula o ángulo que forman.

b) Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e é perpendicular a π_1 . Calcula o punto de corte de r e π_1 .

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,1,1)$ respecto do plano π_1

4. a) Nun experimento aleatorio, sexan A e B dous sucesos con $P(\bar{A}) = 0,4$; $P(B) = 0,7$. Se A e B son independentes, calcula $P(A \cup B)$ e $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario ou complementario de A).

b) Nun grupo de 100 persoas hai 40 homes e 60 mulleres. Elixense ao azar 4 persoas do grupo, ¿cal é a probabilidade de seleccionar máis mulleres que homes?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

2. a) Calcula os valores a, b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 3$ e determina o punto no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x + 3y = 0$.

b) Se $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao, cun punto de inflexión no punto $(0,5)$ e un extremo relativo no punto $(1,1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(1,0,5)$ e $Q(5,2,3)$

a) Calcula a distancia do punto $A(5, -1, 6)$ á recta r .

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a r e pasa polo punto $A(5, -1, 6)$.

c) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ e o punto de corte da recta r co plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

4. Nun estudo realizado nun centro de saúde, observouse que o 30% dos pacientes son fumadores e destes, o 60% son homes. Entre os pacientes que non son fumadores, o 70% son mulleres. Elixido un paciente ao azar,

a) Calcula a probabilidade de que o paciente sexa muller

b) Se o paciente elixido é home, ¿cal é a probabilidade de que sexa fumador?

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a-1)y + z = -1 \\ (a-1)y + 2z = -2 \\ x + (a^2 - 5a + 5)z = -a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) \quad (1 \text{ punto})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos(\pi x) + 2^x \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sqrt{x^2 + x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(1, 3)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2017ko EKAINA

MATEMATIKA II

EVALUACION DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

JUNIO 2017

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m . (NO es necesario resolverlo)

$$2x + y - z = 1$$

$$x + my + z = 2$$

$$3x + y - mz = 3$$

Ejercicio A2

Dado el punto $M(1, -3, 7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1, -3, 4)$ y $B(0, -4, 1)$.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$

- Calcula A , B , y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y que corta al eje OX en $x = 1$.
- Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

Ejercicio A4

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo $A(0,0)$, $B(0, 2)$, $C(4,2)$, $D(4, 0)$ en dos recintos.

- Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo $ABCD$.
- Calcula el área de cada uno de los recintos.

Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Ejercicio 1 Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
- 3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2x2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

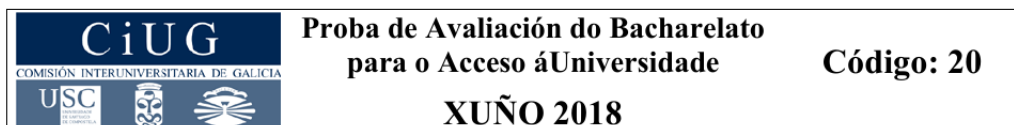
Ejercicio 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2+ax & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2\sin(x)+b & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- 1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = -2$.
- 3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$.

Ejercicio 3 Sean el punto $A = (4, 0, 1)$ y la recta $r : \begin{cases} x-2 & = & 0 \\ y-z-2 & = & 0 \end{cases}$

- 1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r que pasa por el punto A .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a r y a A .



MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

- 1.a) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula os valores de m para que a matriz inversa de M sexa $\frac{1}{4}M$.
 b) Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula a matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, sendo B^t e C^t as traspostas de B e C respectivamente.
- 2.a) Calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.
 b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 4x$ e a recta $y = x - 4$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes, o vértice e concavidade ou convexidade).
3. a) Determina o valor de λ para que os puntos $A(3,0,-1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,-2,-5)$ e $D(\lambda, 6,-1)$ sexan coplanares e calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que os contén.
 b) Determina a posición relativa do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $P(-4,4,2)$ e $Q(4,8,-4)$. Se se cortan, calcula o punto de corte.
 c) Calcula o punto simétrico do punto $P(-4,4,2)$ respecto do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.
4. Nas rebaixas duns grandes almacéns están mesturadas e á venda 200 bufandas da marca A, 150 da marca B e 50 da marca C. A probabilidade de que unha bufanda da marca A sexa defectuosa é 0,01; 0,02 se é da marca B e 0,04 se é da marca C. Unha persoa elixe unha bufanda ao azar.
 a) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida sexa da marca A ou defectuosa.
 b) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida non sexa defectuosa nin da marca C.
 c) Se a bufanda elixida non é defectuosa, cal é a probabilidade de que sexa da marca B?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:
$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$

 b) Resólveo, se é posible, cando $m = 3$.
2. a) Calcula a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sexa continua e derivable en $x = 0$.
 b) Calcula os vértices do rectángulo de área máxima que se pode construír, se un dos vértices é o $(0,0)$, outro está sobre o eixe X , outro sobre el eixe Y e o outro sobre a recta $2x + 3y = 8$.
 c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx$.
3. a) Dado o plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula o valor de a para que a recta r que pasa polos puntos $P(a,a,a)$ e $Q(1,3,0)$ sexa paralela ao plano π .
 b) Para $a = 1$, calcula a distancia de r a π .
 c) Para $a = 1$, calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a π e contén a r .
4. a) Un exame tipo test consta de 10 preguntas, cada unha con 4 respostas das cales só unha é correcta. Se se contesta ao azar, cal é a probabilidade de contestar ben polo menos dúas preguntas?
 b) A duración dun certo tipo de pilas eléctricas é unha variable que segue unha distribución normal de media 50 horas e desviación típica 5 horas. Calcula a probabilidade de que unha pila eléctrica deste tipo, elixida ao azar, dure menos de 42 horas.



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
206 MATEMÁTICAS II JUNIO 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 y A^4 .
- b) [1 p.] ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$?

CUESTIÓN A.2:

- a) [1,5 p.] Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.
- b) [0,5 p.] Calcule dicha suma máxima.

CUESTIÓN A.3:

- a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$.
- b) [0,5 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

CUESTIÓN A.4: Considere el plano π dado por la ecuación $3x - 2y + z = 3$.

- a) [1,25 p.] Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r dada por

$$r: \begin{cases} x+3y+3z = 0 \\ y+2z = 1 \end{cases}$$

- b) [1,25 p.] En caso de que la recta r sea paralela al plano π , calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta r corte al plano π , calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

CUESTIÓN A.5: Una máquina funciona en modo automático el 70% de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0,15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0,05.

- a) [0,75 p.] Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.
- b) [0,75 p.] Si un día tiene un fallo, ¿cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

4. Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en los que la recta tangente es horizontal.
[1 punto]
 - b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.
[1 punto]

5. Sean P , Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z = 4$ con los tres ejes de coordenadas OX , OY y OZ , respectivamente.
- a) Calcule los puntos P , Q y R , y el perímetro del triángulo de vértices P , Q y R .
[1 punto]
 - b) Calcule el área del triángulo de vértices P , Q y R .
[1 punto]

NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ puede usar

la expresión $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$, donde $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es el producto vectorial de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

6. Considere la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
- a) Calcule el dominio de la función f , los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
[1 punto]
 - b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función f , las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje de abscisas.
[1 punto]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Ejercicio 1 Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

- 1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
- 3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2x2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

Ejercicio 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2+ax & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2\sin(x)+b & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- 1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- 2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = -2$.
- 3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$.

Ejercicio 3 Sean el punto $A = (4, 0, 1)$ y la recta $r : \begin{cases} x-2 & = & 0 \\ y-z-2 & = & 0 \end{cases}$

- 1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r que pasa por el punto A .
- 2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a r y a A .

4. Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en los que la recta tangente es horizontal.
[1 punto]
 - b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.
[1 punto]

5. Sean P , Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z = 4$ con los tres ejes de coordenadas OX , OY y OZ , respectivamente.
- a) Calcule los puntos P , Q y R , y el perímetro del triángulo de vértices P , Q y R .
[1 punto]
 - b) Calcule el área del triángulo de vértices P , Q y R .
[1 punto]

NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ puede usar

la expresión $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$, donde $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es el producto vectorial de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

6. Considere la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
- a) Calcule el dominio de la función f , los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
[1 punto]
 - b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función f , las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje de abscisas.
[1 punto]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
- b) [0,5 p.] Para $a = 1$, calcule la inversa de A .
- c) [1 p.] Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3 .

B.2: a) [1 p.] Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

b) [0,5 p.] Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto $(1,2)$.

c) [1 p.] Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

B.3: Los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

- a) [1 p.] Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π .
- b) [1,5 p.] Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0,5% y del 2%, respectivamente.

- a) [1 p.] Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
- b) [1,5 p.] Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
- b) [0,5 p.] Para $a = 1$, calcule la inversa de A .
- c) [1 p.] Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3 .

B.2: a) [1 p.] Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

b) [0,5 p.] Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto $(1,2)$.

c) [1 p.] Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

B.3: Los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

- a) [1 p.] Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π .
- b) [1,5 p.] Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0,5% y del 2%, respectivamente.

- a) [1 p.] Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
- b) [1,5 p.] Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- 1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M .
- 2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{a - x^2}{2 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- 1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.
- 2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?
- 3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Ejercicio 3

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ y el punto $A = (0, 0, 3)$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2 .

Ejercicio 4

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70kg y desviación típica de 10kg.

- 1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.
- 2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.