

Distribuciones e inferencia

Problemas reales por convocatoria - 2º Bachillerato Ciencias

Cada página procede de una convocatoria oficial o de una recopilación identificada y se conserva como imagen para respetar la notación matemática original.



Evaluación para Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx$ b) $\int x^2 \ln x \, dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1} . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$ **(1,25 puntos)**

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**

a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33 % de las llamadas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, segundo os valores de k , o rango das matrices AB e BA .

b) Para o valor $k = 0$, determina as matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$

b) A derivada dunha función $f(x)$, que ten por dominio $(0, \infty)$, é $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina a función $f(x)$ tendo en conta que a súa gráfica pasa polo punto $(1, 4)$.

c) Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $(0, 1, 3)$ e $(1, 1, 1)$ e s a recta $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) ¿É s paralela ao plano YZ ? ¿Está contida no devandito plano?

c) Calcula a distancia da recta r ao plano $\pi: 2x + z = 0$.

4. Sexan A e B dous sucesos con $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ e $P(A \cup B) = 0,9$

a) ¿Son A e B sucesos independentes? Xustifica a resposta.

b) Calcula $P(A - B)$ e $P(A/\bar{B})$. (Nota: $\bar{B}$ suceso contrario ou complementario de B).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

2. Dada a función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Estuda, en $x = 0$, a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.

b) Determina os puntos da gráfica de $f(x)$ nos que a recta tanxente é paralela á recta $x - 4y = 0$ e determina as ecuacións desas rectas tanxentes.

c) Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

3. Dados os planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$; e a recta $r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa dos planos α e β . Calcula a distancia entre eles.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a α e contén á recta r .

c) Sexan P e Q os puntos de corte da recta r cos planos XY e YZ respectivamente. Calcula a distancia entre P e Q .

4. O total de vendas diarias nun pequeno restaurante é unha variable que segue unha distribución normal de media 1220€ ao día e desviación típica 120€ ao día.

a) Calcula a probabilidade de que nun día elixido ao azar as vendas excedan de 1400€.

b) Se o restaurante debe vender polo menos 980€ ao día para cubrir os gastos, ¿cal é a probabilidade de que un día elixido ao azar, o restaurante non cubra gastos?

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + (a^2 + 2)y + 3z = 3 \\ -2x - (a^2 + 2)y + (a - 3)z = \sqrt{2} - 3 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Comprueba que las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P . Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3. (2 puntos)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int x^2 e^{2x} dx \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{3}$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos(\frac{\pi x}{2})}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN B

B1) Encuentra la matrix X que verifica $7A - A^7 = BB'X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

B2) A , B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$.

Encuentra un punto, D , de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A , B , C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen $6u^3$.
(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Dadas las funciones $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

(3 puntos)



Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} \quad (1,25 \text{ puntos por límite})$$

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

- a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**
 b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**
 b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. **(1 punto)**

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

- a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**
 a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

- b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)** (Sol: 0,3446)
 b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta.

(0,5 puntos) (Sol: 17,2 min)

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a-1)y + z = -1 \\ (a-1)y + 2z = -2 \\ x + (a^2 - 5a + 5)z = -a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) \quad (1 \text{ punto})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos(\pi x) + 2^x \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sqrt{x^2 + x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(1, 3)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

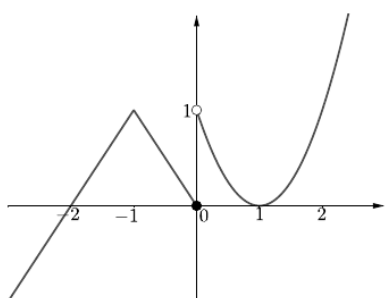
(3 puntos)

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.



El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:

- (0.5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.
- (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
- (0.5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
- (0.5 puntos) Determinar el valor de $\int_{-2}^0 f(x) dx$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(0, -1, 1)$ y la recta r , que pasa por el punto $Q(1, 0, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (0, 1, 2)$, se pide:

- (0.5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P .
- (0.5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\vec{SP}$ sea perpendicular a la recta r .
- (1.5 puntos) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2 , contenidos en la recta r , que están a distancia $\sqrt{5}$ de P .

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8.5$ y desviación típica $\sigma = 2.5$. Se pide:

- (1.25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0.05$.
- (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.



MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un número real.

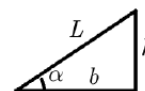
- a) Estudiar el rango de A según los valores de m . (1.5 puntos)
 b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A^t \text{ matriz traspuesta})$$

2. Se quiere construir una rampa (ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

- a) Calcula, en función de m , el valor de b y comprueba que la longitud de la rampa

L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



- b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo t , en segundos, que tarda un

camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$ (0.5 puntos)

- c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)
 (Se recuerda que $\tan = \text{tangente}$ y $\text{velocidad} = \text{espacio/tiempo}$).

3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones $r: \frac{x-1}{2} = y+1 = -z+2$. Calcula:

- a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r . (0.75 puntos)
 b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)
 c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

4. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B . Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

- a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)
 b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)
 c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B . (0.5 puntos)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
 el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula, si existe, la inversa de B . (1 punto)
 b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB = C$. (1.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
 b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
 c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

3. Dado la recta $r : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, el punto $Q(1, 1, 1)$ y un plano π .

- a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P, Q) = 1$ u. (1.25 puntos)
 b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P, Q) = d(P, \pi)$. Determina la ecuación del plano π . (1.25 puntos)

4. En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

- a) Sea fumador. (0.5 puntos)
 b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)
 c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M + B| = 3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. **(2 puntos)**

E2.- Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y+1}{2} = z - 1$ y el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$, se pide:

- a) Determinar la posición relativa de r y π . **(0,8 puntos)**
- b) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π . **(1,2 puntos)**

E3.- Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, determinense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$. **(1 punto)**

E5.- La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. **(2 puntos)**



Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.

Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A**1A.** a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1,1]$. **(1,5 puntos)**b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real. **(1 punto)****2A.** Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos x \, dx \qquad \text{b) } \int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} \, dx \qquad \text{(1,25 puntos por integral)}$$

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$.**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 3y - az & = & 4 \\ x + ay + z & = & 2 \\ x + 4y - 5z & = & 6 \end{array} \right\} \qquad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. **(1 punto)****4A.** Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:a) Calcula la distancia del punto A al plano α . **(1 punto)**b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α . **(1,5 puntos)****5A.** a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3% de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4% de defectuosos y la C produce 800 con un 2% de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X . **(0,75 puntos)**b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	k	P												
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313



Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$. **(0,75 puntos)**

b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1,3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**

c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. **(1 punto)**

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2xe^{-x}$ y $g(x) = x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**

c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ y $\vec{w} = (2, 0, 3)$:

a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2, 0, 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**

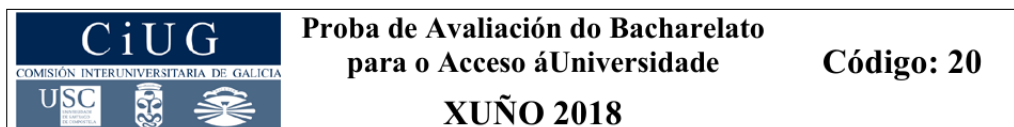
a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879



MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

- 1.a) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula os valores de m para que a matriz inversa de M sexa $\frac{1}{4}M$.
 b) Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula a matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, sendo B^t e C^t as traspostas de B e C respectivamente.
- 2.a) Calcula: intervalos de crecemento e decrecemento e máximos e mínimos relativos de $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.
 b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y = x^2 - 4x$ e a recta $y = x - 4$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes, o vértice e concavidade ou convexidade).
3. a) Determina o valor de λ para que os puntos $A(3,0,-1)$, $B(2,2,-1)$, $C(1,-2,-5)$ e $D(\lambda, 6,-1)$ sexan coplanares e calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que os contén.
 b) Determina a posición relativa do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ e a recta r que pasa polos puntos $P(-4,4,2)$ e $Q(4,8,-4)$. Se se cortan, calcula o punto de corte.
 c) Calcula o punto simétrico do punto $P(-4,4,2)$ respecto do plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.
4. Nas rebaixas duns grandes almacéns están mesturadas e á venda 200 bufandas da marca A, 150 da marca B e 50 da marca C. A probabilidade de que unha bufanda da marca A sexa defectuosa é 0,01; 0,02 se é da marca B e 0,04 se é da marca C. Unha persoa elixe unha bufanda ao azar.
 a) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida sexa da marca A ou defectuosa.
 b) Calcula a probabilidade de que a bufanda elixida non sexa defectuosa nin da marca C.
 c) Se a bufanda elixida non é defectuosa, cal é a probabilidade de que sexa da marca B?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:
$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$

 b) Resólveo, se é posible, cando $m = 3$.
2. a) Calcula a e b para que a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sexa continua e derivable en $x = 0$.
 b) Calcula os vértices do rectángulo de área máxima que se pode construír, se un dos vértices é o $(0,0)$, outro está sobre o eixe X , outro sobre el eixe Y e o outro sobre a recta $2x + 3y = 8$.
 c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1} \, dx$.
3. a) Dado o plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula o valor de a para que a recta r que pasa polos puntos $P(a,a,a)$ e $Q(1,3,0)$ sexa paralela ao plano π .
 b) Para $a = 1$, calcula a distancia de r a π .
 c) Para $a = 1$, calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a π e contén a r .
4. a) Un exame tipo test consta de 10 preguntas, cada unha con 4 respostas das cales só unha é correcta. Se se contesta ao azar, cal é a probabilidade de contestar ben polo menos dúas preguntas?
 b) A duración dun certo tipo de pilas eléctricas é unha variable que segue unha distribución normal de media 50 horas e desviación típica 5 horas. Calcula a probabilidade de que unha pila eléctrica deste tipo, elixida ao azar, dure menos de 42 horas.

14. Fuente: Aragón, convocatoria extraordinaria 2019, página 7

Cuando repetimos 100 veces la jugada, en la distribución binomial $B(100, 0.48)$ la probabilidad de obtener 10 éxitos

es: $p[x=10] = \binom{100}{10} \cdot 0.48^{10} \cdot 0.52^{90}$.

b) Estamos ante una distribución binomial $B(200, 0.48)$. Nos piden la probabilidad: $p[90 \leq x \leq 110]$.

Como $n \cdot p = 200 \cdot 0.48 = 96 > 5$, $n \cdot q = 200 \cdot 0.52 = 104 > 5$ la distribución binomial se aproxima de forma perfecta a una distribución normal.

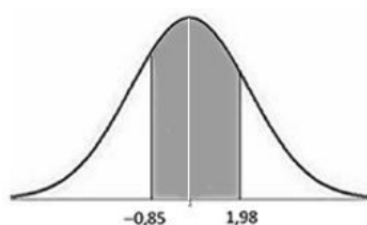
La media de la distribución normal es $\mu = n \cdot p = 96$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot 0.48 \cdot 0.52} = 7.065$.

Por consiguiente, la distribución binomial $B(200, 0.48)$ se aproxima a una distribución normal $N(96, 7.065)$.

Ahora basta tipificar la variable para hacer uso de las tablas correspondientes a la normal $N(0, 1)$. El esquema es el siguiente:

$$x \in B(200, 0.48) \rightarrow x' \in N(96, 7.065) \rightarrow z = \frac{x' - \mu}{\sigma} = \frac{x' - 96}{7.065} \in N(0, 1)$$

Tenemos:



$$p[90 \leq x \leq 110] = p\left[\frac{90-96}{7.065} \leq z \leq \frac{110-96}{7.065}\right] = p[-0.85 \leq z \leq 1.98] =$$

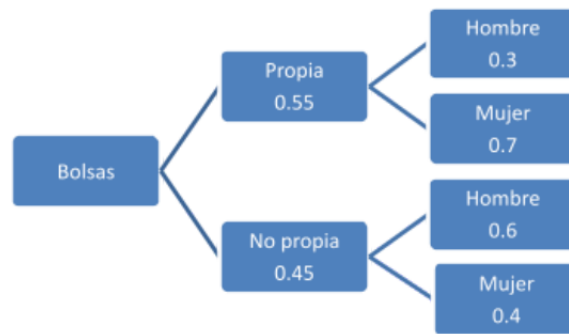
$$= p[z \leq 1.98] - p[z \leq -0.85] = (1)$$

$$p[z \leq 1.98] = 0.9761 \quad (\text{en la tabla})$$

$$p[z \leq -0.85] = p[z \geq 0.85] = 1 - p[z \leq 0.85] = 1 - 0.8025 = 0.1977$$

$$\text{Luego: } (1) = 0.9761 - 0.1977 = 0.7784$$

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado



b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

Por el Teorema de la probabilidad total

$$P(M)=P(P)P(M/P)+P(NP)+P(M/NP)= (0.55) (0.7) + (0.45)(0.4) =0.565$$

El 56.5% de los clientes que entran al supermercado traigan o no su propia bolsa son mujeres.

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Aplicando el Teorema de Bayes

$$P(P/H) = \frac{P(P)P(H/P)}{P(H)} = \frac{(0.55)(0.3)}{1-0.565} = 0.379$$

Existe un 38% de probabilidades de que un cliente elegido al azar, siendo hombre, haya traído su propia bolsa



Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx \quad \text{b) } \int x^2 \ln x \, dx \quad \text{(1,25 puntos por integral)}$$

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1} . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$ **(1,25 puntos)**

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**

a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33 % de las llamadas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2018-2019 MATERIA: MATEMÁTICAS II	
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada. CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. TIEMPO: 90 minutos. OPCIÓN A Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0, \\ -x + ky - z = 0, \\ (k-1)x - y = -(k+1), \end{cases} \quad \text{se pide:}$ (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k. (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$. Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos. (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos: $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $g(1) = 3$, $g'(1) = 4$. Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$. (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$.) Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos. Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide: (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos. (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes. (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1. Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos. Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal. (1.25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados. (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.		



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
 acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones
$$\left. \begin{array}{rrcr} mx & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & my & & & = & m \\ x & & & + & mz & = & m \end{array} \right\} m \in \mathbb{R}.$$
- a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m . (1.25 puntos)
 b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$. (0.75 puntos)
 c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0, y = 1, z = 1$. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \frac{2}{2 + e^x}$.
- a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)
 b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int \frac{2}{2 + e^x} dx$ (1.5 puntos)

3. Sean los planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ y π_2 . Su intersección es la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Calcula:
- a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1, 1, 1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)
 b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r . (1.25 puntos)

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10 % de la veces.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.