

Matrices

Problemas reales por convocatoria - 2º Bachillerato Ciencias

Cada página procede de una convocatoria oficial o de una recopilación identificada y se conserva como imagen para respetar la notación matemática original.



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
158 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2016

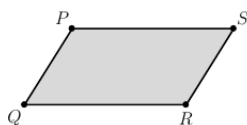
OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Calcule el determinante de A .
- b) [1,5 puntos] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 , A^4 y A^5 . Calcule A^{2016} .

CUESTIÓN A.2: Los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 2, 2)$ y $R = (1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



- a) [1,25 puntos] Calcule el área del paralelogramo.
- b) [1,25 puntos] Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

CUESTIÓN A.3: Dada la función

$$f(x) = e^{\frac{2x}{1+x^2}}$$

se pide:

- a) [1 punto] Estudie las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.
- b) [1,5 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

CUESTIÓN A.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.
- b) [1 punto] Determine el valor de $a > 0$ para que $\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{4}$.



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
158 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2016

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
- b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

CUESTIÓN A.2: Considere los puntos $P = (2, 7, 3)$, $Q = (1, 2, 5)$ y $R = (-1, -2, 5)$.

- a) [1 punto] Calcule el área del triángulo PQR .
- b) [0,5 puntos] Determine la ecuación general (o implícita) del plano que contiene al triángulo PQR .
- c) [1 punto] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P , está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR .

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

- a) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \right)$.
- b) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$.

CUESTIÓN A.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$.
- b) [1 punto] Determine el área del recinto limitado por el eje OX , las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
CURSO 2016–2017

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f . Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [0,5 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 2.- Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX , la recta $y = x$, la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

- a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.
- b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.
- c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \frac{1}{x^2}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k .
- b) [1 punto] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2(A^t A^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A .

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(0, 1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$

- a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .
- b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – SEPTIEMBRE 2017

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

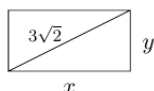
Ejercicio 1

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$

- 1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x .
- 2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$.

Ejercicio 2

- 1) [2,5 PUNTOS] Calcule el rectángulo de base x cm, altura y cm y diagonal $3\sqrt{2}$ cm cuyo perímetro sea máximo.



- 2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto $(1, 2)$.

Ejercicio 3

Sean $P : x + 3y + 2z - 1 = 0$ y $Q : 2x + 6y + 4z + 3 = 0$ dos planos.

- 1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación implícita (general).
- 2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P .
- 3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q .
- 4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por el punto $(0, 0, 0)$.

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a , cuando M posee inversa. **(0,5 puntos)**

b) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1} . **(1,75 puntos)**

E2.- a) Consideremos los puntos $P(-1, -4, 0)$, $Q(0, 1, 3)$, $R(1, 0, 3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P , Q y R . **(1,25 puntos)**

b) Calcular a para que el punto $S(3, a, 2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$. **(1 punto)**

E3.- a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcular a para que f sea derivable en $x = 0$. **(1 punto)**

b) Hallar a , b y c para que la función $f(x) = ax^2 + b \sin x + c$ verifique $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 2$. **(1,25 puntos)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$. **(1 punto)**

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 - 2$. **(1,25 puntos)**

E5.- De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas. **(1 punto)**



Evaluación para Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx \quad \text{b) } \int x^2 \ln x \, dx \quad \text{(1,25 puntos por integral)}$$

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1} . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$ **(1,25 puntos)**

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**

a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33 % de las llamadas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, segundo os valores de k , o rango das matrices AB e BA .

b) Para o valor $k = 0$, determina as matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$

b) A derivada dunha función $f(x)$, que ten por dominio $(0, \infty)$, é $f'(x) = 1 + \ln x$. Determina a función $f(x)$ tendo en conta que a súa gráfica pasa polo punto $(1, 4)$.

c) Determina, se existen, os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $(0, 1, 3)$ e $(1, 1, 1)$ e s a recta $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estuda a súa posición relativa.

b) ¿É s paralela ao plano YZ ? ¿Está contida no devandito plano?

c) Calcula a distancia da recta r ao plano $\pi: 2x + z = 0$.

4. Sexan A e B dous sucesos con $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ e $P(A \cup B) = 0,9$

a) ¿Son A e B sucesos independentes? Xustifica a resposta.

b) Calcula $P(A - B)$ e $P(A/\bar{B})$. (Nota: $\bar{B}$ suceso contrario ou complementario de B).

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 0$.

2. Dada a función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Estuda, en $x = 0$, a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.

b) Determina os puntos da gráfica de $f(x)$ nos que a recta tanxente é paralela á recta $x - 4y = 0$ e determina as ecuacións desas rectas tanxentes.

c) Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

3. Dados os planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$; e a recta $r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa dos planos α e β . Calcula a distancia entre eles.

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a α e contén á recta r .

c) Sexan P e Q os puntos de corte da recta r cos planos XY e YZ respectivamente. Calcula a distancia entre P e Q .

4. O total de vendas diarias nun pequeno restaurante é unha variable que segue unha distribución normal de media 1220€ ao día e desviación típica 120€ ao día.

a) Calcula a probabilidade de que nun día elixido ao azar as vendas excedan de 1400€.

b) Se o restaurante debe vender polo menos 980€ ao día para cubrir os gastos, ¿cal é a probabilidade de que un día elixido ao azar, o restaurante non cubra gastos?

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
- b) (1.5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.
- c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6 , en caso de que exista.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$ y se pide:

- a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.
- c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3, 5, -3)$ a la recta r .
- b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q .

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 5, 1)$ y se pide:

- a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
- b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2017

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
- b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

CUESTIÓN A.2: Considere la recta r que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$ y $B = (3, 3, 4)$ y la recta s cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 3, 1)$ y pasa por el punto $C = (4, 0, 3)$.

- a) [1 punto] Determine las ecuaciones continuas de r y s .
- b) [1,5 puntos] Estudie la posición relativa de r y s .

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

- a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^x$.
- b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

CUESTIÓN A.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\cos x \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$.
- b) [0,5 puntos] Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\frac{\cos x \sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$ que cumpla la condición $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

CUESTIÓN A.5: [1 punto]

En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65% de los alumnos estudian inglés, el 20% alemán y el resto francés. La asignatura de robótica es optativa y la elige el 30% de los alumnos de inglés, el 50% de los que estudian alemán y el 70% de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2016-2017

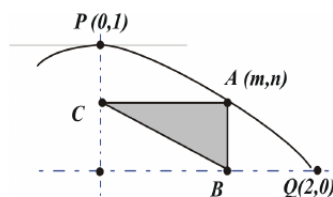
OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Estudia, en función de los valores *reales* de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k = 1$. (1.5 puntos)
- b) Estudia, en función de los valores *reales* de k , si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0,1)$ y $Q(2,0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX .

- a) Calcula los valores de a, b y c . (1 punto)
- b) Con $a = 1, b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m,n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



3. Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $D(4,1,3)$. Determina:

- a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
- b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C . (1 punto)
- c) El punto de corte de la recta r con el plano π . (0.75 puntos)

4. En un asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas la personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70 % de las personas que entran cogen harina y el 40 % los dos productos. Calcula:

- a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)
- b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)
- c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	--	------------------------------	---

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible. **(1 punto)**

b) Determinar X tal que $AX = 2B + I$ siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **(1,25 puntos)**

E2.- Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2, -1, -2)$. **(2,25 puntos)**

E3.- a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente. **(1 punto)**

b) Encontrar un intervalo en el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz. **(1,25 puntos)**

E4.- a) Calcular la recta tangente a la curva $f(x) = 4e^{x-1}$ en el punto $(1, f(1))$. **(1 punto)**

b) Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x) = x^3$ y la recta $y = 4x$. **(1,25 puntos)**

E5.- Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8? **(1 punto)**



Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} \quad (1,25 \text{ puntos por límite})$$

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.2B. Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

- a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**
 b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)**

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**
 b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. **(1 punto)**b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

- a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**
 a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

- b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)** (Sol: 0,3446)
 b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta.

(0,5 puntos) (Sol: 17,2 min)

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, segundo os valores de λ , o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

2. a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3 . Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2€/dm^2 e para a base outro que custa 3€/dm^2 . Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$

3. Dados os planos $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π_1 e π_2 . Se se cortan, calcula o ángulo que forman.

b) Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e é perpendicular a π_1 . Calcula o punto de corte de r e π_1 .

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,1,1)$ respecto do plano π_1

4. a) Nun experimento aleatorio, sexan A e B dous sucesos con $P(\bar{A}) = 0,4$; $P(B) = 0,7$. Se A e B son independentes, calcula $P(A \cup B)$ e $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario ou complementario de A).

b) Nun grupo de 100 persoas hai 40 homes e 60 mulleres. Elixense ao azar 4 persoas do grupo, ¿cal é a probabilidade de seleccionar máis mulleres que homes?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

2. a) Calcula os valores a, b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 3$ e determina o punto no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x + 3y = 0$.

b) Se $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao, cun punto de inflexión no punto $(0,5)$ e un extremo relativo no punto $(1,1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(1,0,5)$ e $Q(5,2,3)$

a) Calcula a distancia do punto $A(5, -1, 6)$ á recta r .

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a r e pasa polo punto $A(5, -1, 6)$.

c) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ e o punto de corte da recta r co plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

4. Nun estudo realizado nun centro de saúde, observouse que o 30% dos pacientes son fumadores e destes, o 60% son homes. Entre os pacientes que non son fumadores, o 70% son mulleres. Elixido un paciente ao azar,

a) Calcula a probabilidade de que o paciente sexa muller

b) Se o paciente elixido é home, ¿cal é a probabilidade de que sexa fumador?

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \sin(x)$, se pide:

- (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) - \frac{2}{g(x)} \right)$.
- (0.75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(\frac{1}{2}, 4)$.
- (1.25 puntos) Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1 punto) Determinar la matriz P^{-1} , inversa de la matriz P .
- (1 punto) Determinar la matriz B^{-1} , inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.
- (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2 , siendo $A = PJP^{-1}$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- (1 punto) Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$$

- (1 punto) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s , que pasa por el origen.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

El 40% de los sábados Marta va al cine, el 30% va de compras y el 30% restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras, y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

- (1 punto) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.
- (1 punto) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
158 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2017

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
- b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = C$.

CUESTIÓN A.2: Considere el plano π que pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$ y tiene como vectores directores a $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 2)$. Considere la recta r que pasa por los puntos $A = (1, 0, 4)$ y $B = (3, 2, 2)$.

- a) [0,75 puntos] Determine la ecuación de π .
- b) [0,75 puntos] Determine la ecuación de r .
- c) [1 punto] Estudie la posición relativa de π y r .

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

- a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{4}{x - 4} \right)$.
- b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}$.

CUESTIÓN A.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$.
- b) [0,5 puntos] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, y la gráfica de la función $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

CUESTIÓN A.5: Según un estudio reciente, el 68% de los encuestados poseen un *smartphone*, el 38% tienen una *tablet* y el 16% disponen de ambos dispositivos.

- a) [0,5 puntos] Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos.
- b) [0,5 puntos] Resulta que la persona elegida posee un *smartphone*, ¿qué probabilidad hay de que tenga una *tablet*?

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 2, 0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \quad (3 \text{ puntos})$$

B3) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2, 4]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$ y $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos)



UNIBERTSITATERA SARTZEKO
EBALUAZIOA

2017ko EKAINA

MATEMATIKA II

EVALUACION DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

JUNIO 2017

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m . (NO es necesario resolverlo)

$$2x + y - z = 1$$

$$x + my + z = 2$$

$$3x + y - mz = 3$$

Ejercicio A2

Dado el punto $M(1, -3, 7)$, obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos $A(1, -3, 4)$ y $B(0, -4, 1)$.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$

- Calcula A , B , y C sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, que además la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y que corta al eje OX en $x = 1$.
- Para los valores obtenidos calcula los máximos y los mínimos de la función.

Ejercicio A4

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo $A(0,0)$, $B(0, 2)$, $C(4,2)$, $D(4, 0)$ en dos recintos.

- Dibuja la gráfica de la función y el rectángulo $ABCD$.
- Calcula el área de cada uno de los recintos.

Ejercicio A5

Calcular la potencia A^{2017} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m la matriz A posee inversa? Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m .

b) Hallar el valor m para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio B2

Calcula la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{3} \text{ y que pasa por el punto } A(14, 3, 3).$$

Ejercicio B3

Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

a) ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Para qué intervalos es creciente?

b) Razonar si tiene máximos y mínimos. En caso afirmativo hallarlos.

c) Calcula la recta tangente a dicha curva en el punto cuya abscisa es $x = 0$.

Ejercicio B4

Resolver la siguiente integral: $\int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

Ejercicio B5

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros.

Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.