

Integrales elementales

Problemas reales por convocatoria - 2º Bachillerato Sociales

Cada página procede de una convocatoria oficial o de una recopilación identificada y se conserva como imagen para respetar la notación matemática original.



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
158 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2016

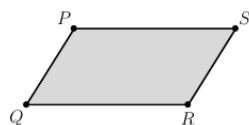
OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Calcule el determinante de A .
- b) [1,5 puntos] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 , A^4 y A^5 . Calcule A^{2016} .

CUESTIÓN A.2: Los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 2, 2)$ y $R = (1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



- a) [1,25 puntos] Calcule el área del paralelogramo.
- b) [1,25 puntos] Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

CUESTIÓN A.3: Dada la función

$$f(x) = e^{\frac{2x}{1+x^2}}$$

se pide:

- a) [1 punto] Estudie las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.
- b) [1,5 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

CUESTIÓN A.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.
- b) [1 punto] Determine el valor de $a > 0$ para que $\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{4}$.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$, calcule razonadamente los siguientes determinantes:

a) [1 punto] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

CUESTIÓN B.2: Considere el plano π que pasa por el punto $P = (2, 0, 1)$ y tiene como vectores directores los vectores $\vec{v} = (1, 0, 2)$ y $\vec{w} = (0, 1, -2)$. Considere la recta r dada por

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}.$$

- a) [1,25 puntos] Estudie la posición relativa de π y r .
 b) [1,25 puntos] Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q = (-1, 0, -2)$, es paralela a π y perpendicular a r .

CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) [1,5 puntos] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b) [1 punto] Determine el valor de a para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

CUESTIÓN B.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx$.
 b) [1 punto] Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$ que cumpla la condición $F(0) = 2$.



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
158 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2016

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
- b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

CUESTIÓN A.2: Considere los puntos $P = (2, 7, 3)$, $Q = (1, 2, 5)$ y $R = (-1, -2, 5)$.

- a) [1 punto] Calcule el área del triángulo PQR .
- b) [0,5 puntos] Determine la ecuación general (o implícita) del plano que contiene al triángulo PQR .
- c) [1 punto] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P , está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR .

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

- a) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} \right)$.
- b) [1,25 puntos] $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$.

CUESTIÓN A.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$.
- b) [1 punto] Determine el área del recinto limitado por el eje OX , las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA
UNIVERSIDAD
 CURSO 2016–2017

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

- b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.
- c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f . Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [0,5 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 2.- Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX , la recta $y = x$, la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

- a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.
- b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.
- c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \frac{1}{x^2}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

Ejercicio 3.- Considera $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Discute el rango de A según los valores de k .
- b) [1 punto] Para $k = 1$, calcula el determinante de $2(A^t A^{-1})^{2017}$, siendo A^t la traspuesta de A .

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(0, 1, 1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 2 \end{cases}$

- a) [1,25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .
- b) [1,25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r .



Model 1

OPCIÓ B

1. a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left. \begin{aligned} ax + y - 2z &= -1, \\ -x + ay + z &= 2, \\ 3x + y - z &= 0, \\ y + z &= 3. \end{aligned} \right\}$$

(6 punts)

- b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible

(4 punts)

2. Considerem la funció $f(x) = x \cdot |x - 1|$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval $[0, 2]$. (6 punts). Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció anterior i l'eix de les X. (4 punts)

3. Donats els punts $A(1, 0, 3)$ i $B(1, 3, 4)$, determineu els punts situats en el pla $z = 1$ que formin amb els punts A i B un triangle equilàter. (6 punts) Calculeu el volum del tetraedre format pels 3 punts anteriors i l'origen de coordenades. (4 punts)

4. Suposem que els estudiants de la UIB només tenen dos sistemes operatius als seus telèfons mòbils: Android i IOS (el dels iPhone). El 80% dels estudiants de la UIB tenen el sistema operatiu Android. El 25% de les al·lotes estudiants de la UIB tenen IOS al seu telèfon mòbil i el 45% dels estudiants de la UIB són al·lots.

- a) Calculeu la probabilitat que un al·lot de la UIB tingui IOS al seu telèfon mòbil. (6 punts)
- b) Calculeu la probabilitat que un estudiant que tingui Android al telèfon mòbil sigui al·lota. (4 punts)

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro a , cuando M posee inversa. **(0,5 puntos)**

b) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1} . **(1,75 puntos)**

E2.- a) Consideremos los puntos $P(-1, -4, 0)$, $Q(0, 1, 3)$, $R(1, 0, 3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P , Q y R . **(1,25 puntos)**

b) Calcular a para que el punto $S(3, a, 2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x + y - 2z + 5 = 0$. **(1 punto)**

E3.- a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, calcular a para que f sea derivable en $x = 0$. **(1 punto)**

b) Hallar a , b y c para que la función $f(x) = ax^2 + b \sin x + c$ verifique $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 2$. **(1,25 puntos)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{(x^2)}}{x}$. **(1 punto)**

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 - 2$. **(1,25 puntos)**

E5.- De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas. **(1 punto)**



**Evaluación para Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia: MATEMÁTICAS II**

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(1 punto)**

2A. a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 6x + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{rrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array} \right\} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 0$. **(1 punto)**

4A. Dados los planos $\alpha \equiv -x + 2y + z + 2 = 0$ y $\beta \equiv -2y + z = 0$

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano α con los tres ejes coordenados. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0, -1, 3)$. **(1 punto)**

5A. a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25 % de los componentes son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 55 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura. **(0,75 puntos)**

a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras. **(0,75 puntos)**

b2) Obtener más de tres caras. **(0,5 puntos)**

n	k	p												
		0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
5	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313



Evaluación para Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B

1B. Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m^3 con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material. **(2,5 puntos)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 2} dx \quad \text{b) } \int x^2 \ln x \, dx \quad \text{(1,25 puntos por integral)}$$

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente A^{-1} . **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X + B = C^2$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Halla razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el plano $\alpha \equiv x - y - az + 5 = 0$ es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$ **(1,25 puntos)**

5B. a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca. **(0,75 puntos)**

a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos. **(0,75 puntos)**

b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33 % de las llamadas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2017

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,5 puntos] Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.
- b) [1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

CUESTIÓN A.2: Considere la recta r que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$ y $B = (3, 3, 4)$ y la recta s cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 3, 1)$ y pasa por el punto $C = (4, 0, 3)$.

- a) [1 punto] Determine las ecuaciones continuas de r y s .
- b) [1,5 puntos] Estudie la posición relativa de r y s .

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

- a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^x$.
- b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

CUESTIÓN A.4:

- a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\cos x \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$.
- b) [0,5 puntos] Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $\frac{\cos x \sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$ que cumpla la condición $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

CUESTIÓN A.5: [1 punto]

En un colegio se imparten, como primer idioma, inglés, alemán y francés. El 65% de los alumnos estudian inglés, el 20% alemán y el resto francés. La asignatura de robótica es optativa y la elige el 30% de los alumnos de inglés, el 50% de los que estudian alemán y el 70% de los que cursan francés. Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie robótica?

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + (a^2 + 2)y + 3z = 3 \\ -2x - (a^2 + 2)y + (a - 3)z = \sqrt{2} - 3 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Comprueba que las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P . Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3. (2 puntos)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} \quad (1 \text{ punto})$$

$$\int x^2 e^{2x} dx \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{3}$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos(\frac{\pi x}{2})}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN B

B1) Encuentra la matrix X que verifica $7A - A^7 = BB'X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

B2) A , B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$.

Encuentra un punto, D , de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A , B , C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen $6u^3$.
(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Dadas las funciones $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

(3 puntos)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elegir una de ellas y responder **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

- Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)
- Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

2. Sean las funciones $f : R \rightarrow R$ y $g : [0; +\infty) \rightarrow R$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

- Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . (1 punto)
- Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

3. Dadas las rectas $r : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ y $s : x + 1 = \frac{y-1}{2} = z$. Calcula:

- Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)
- El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)
- El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$. (1 punto)

4. Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1? (1.25 puntos)
- Si extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A? (1.25 puntos)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2016-2017

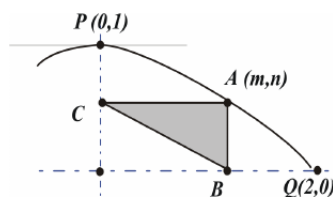
OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Estudia, en función de los valores *reales* de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k = 1$. (1.5 puntos)
- b) Estudia, en función de los valores *reales* de k , si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0,1)$ y $Q(2,0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX .

- a) Calcula los valores de a , b y c . (1 punto)
- b) Con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m,n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



3. Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $D(4,1,3)$. Determina:

- a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
- b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C . (1 punto)
- c) El punto de corte de la recta r con el plano π . (0.75 puntos)

4. En un asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas la personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70 % de las personas que entran cogen harina y el 40 % los dos productos. Calcula:

- a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)
- b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)
- c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

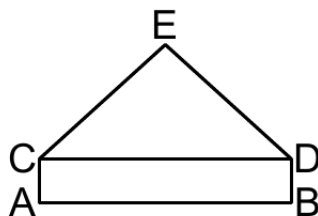


Model 2

OPCIÓ B

1. Tenim tres aixetes per omplir un dipòsit d'aigua i suposam que el cabal que cau per cada aixeta és constant. Si fem servir l'aixeta 1, tardam 10 hores per omplir el dipòsit, si fem servir les aixetes 1 i 2, tardam 4 hores, i si les fem servir totes tres, tardam una hora. Suposant que la suma dels cabdals de les tres aixetes és 10 litres per minut, calculeu el cabdal de l'aigua de cada aixeta (8 punts) i el volum del dipòsit (2 punts).

2. Hem de dissenyar una finestra com la que surt a la figura adjunta, o sigui, el polígon ACEDB, de 30 metres de perímetre. Es tracta d'un rectangle amb un triangle equilàter damunt. Calculeu les dimensions del rectangle perquè l'àrea de la finestra sigui màxima. (10 punts)



3. Considerem les rectes següents dependents d'un paràmetre λ :

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda t, \\ y = -1 + t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases}, \quad s : \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}.$$

- Calculeu el valor de λ perquè r i s es tallin. (7 punts)
- Calculeu el punt d'intersecció pe al valor de λ calculat. (3 punts)

4. El test d'intel·ligència (CI) és una prova que en teoria mesura la intel·ligència de l'individu i dona un valor que aproximadament té de mitjana 100. O sigui, el nivell 100 se suposa que és el nivell d'intel·ligència d'una persona normal. Suposem ara que el nivell d'intel·ligència d'una determinada població segueix una distribució normal de mitjana 100 i desviació típica 10.

- Calculeu el percentatge de la població que es considera superdotada. Una persona es considera superdotada si té un nivell d'intel·ligència superior a 130. (3 punts)
- Calculeu el percentatge de la població amb un nivell d'intel·ligència entre 90 i 110. (3 punts)
- Ens diuen que el 70% de la població té un nivell d'intel·ligència menor que un cert llinar. Calculeu aquest llinar. (4 punts)

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2
---	---	-----------------------	--

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cuatro ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si A y B tienen inversa y calcularla cuando sea posible. **(1 punto)**

b) Determinar X tal que $AX = 2B + I$ siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **(1,25 puntos)**

E2.- Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto $P(2, -1, -2)$. **(2,25 puntos)**

E3.- a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente. **(1 punto)**

b) Encontrar un intervalo en el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz. **(1,25 puntos)**

E4.- a) Calcular la recta tangente a la curva $f(x) = 4e^{x-1}$ en el punto $(1, f(1))$. **(1 punto)**

b) Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x) = x^3$ y la recta $y = 4x$. **(1,25 puntos)**

E5.- Se lanzan dos dados (con forma cúbica) al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8? **(1 punto)**

OPCIÓN B

E1.- a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \quad (1,25 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (1 punto)

E2.- Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos $P(0, 1, 1)$, $Q(2, -1, -3)$ que pertenecen al plano π , determinar la recta del plano π que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos. (2,25 puntos)

E3.- a) Dado el polinomio $P(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$, hallar C para que el valor de $P(x)$ en su mínimo relativo sea 1. (1,25 puntos)

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$. (1 punto)

E4.- Sea $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Encontrar a para que la función sea continua. (1 punto)

b) Hallar el área de la región delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$, $y = 1$. (1,25 puntos)

E5.- La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 3 caras en tres lanzamientos? (1 punto)



Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.

Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

PROPUESTA B**1B.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} \quad (1,25 \text{ puntos por límite})$$

Nota: $\ln$ denota logaritmo neperiano.**2B.** Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$ a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$. **(1 punto)****3B.** Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. **(1 punto)**b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. **(1,5 puntos)****4B.** a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0, 1, -2)$ y $Q(4, -3, 0)$. **(1 punto)**b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

5B. a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)** (Sol: 0,3446)

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta.

(0,5 puntos)

(Sol: 17,2 min)

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(O alumno/a debe responder só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1= 2 puntos, exercicio 2= 3 puntos, exercicio 3= 3 puntos, exercicio 4= 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina, segundo os valores de λ , o rango da matriz $AA^t - \lambda I$, sendo A^t a matriz trasposta de A e I a matriz unidade de orde 2.

b) Determina a matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica a ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

2. a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Deséxase construír unha caixa de base cadrada, con tapa e cunha capacidade de 80 dm^3 . Para a tapa e a superficie lateral quérese utilizar un material que custa 2€/dm^2 e para a base outro que custa 3€/dm^2 . Calcula as dimensións da caixa para que o seu custo sexa mínimo

c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$

3. Dados os planos $\pi_1: x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estuda a posición relativa de π_1 e π_2 . Se se cortan, calcula o ángulo que forman.

b) Sexa r a recta que pasa polo punto $P(1,1,1)$ e é perpendicular a π_1 . Calcula o punto de corte de r e π_1 .

c) Calcula o punto simétrico do punto $P(1,1,1)$ respecto do plano π_1

4. a) Nun experimento aleatorio, sexan A e B dous sucesos con $P(\bar{A}) = 0,4$; $P(B) = 0,7$. Se A e B son independentes, calcula $P(A \cup B)$ e $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario ou complementario de A).

b) Nun grupo de 100 persoas hai 40 homes e 60 mulleres. Elixense ao azar 4 persoas do grupo, ¿cal é a probabilidade de seleccionar máis mulleres que homes?

OPCIÓN B

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, cando $m = 1$.

2. a) Calcula os valores a, b para que a función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ sexa derivable en $x = 3$ e

determina o punto no que a tanxente á gráfica de $f(x)$ é paralela á recta $x + 3y = 0$.

b) Se $P(x)$ é un polinomio de terceiro grao, cun punto de inflexión no punto $(0,5)$ e un extremo relativo no punto $(1,1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

3. Sexa r a recta que pasa polos puntos $P(1,0,5)$ e $Q(5,2,3)$

a) Calcula a distancia do punto $A(5, -1, 6)$ á recta r .

b) Calcula a ecuación implícita ou xeral do plano que é perpendicular a r e pasa polo punto $A(5, -1, 6)$.

c) Calcula a área do triángulo de vértices os puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ e o punto de corte da recta r co plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

4. Nun estudo realizado nun centro de saúde, observouse que o 30% dos pacientes son fumadores e destes, o 60% son homes. Entre os pacientes que non son fumadores, o 70% son mulleres. Elixido un paciente ao azar,

a) Calcula a probabilidade de que o paciente sexa muller

b) Se o paciente elixido é home, ¿cal é a probabilidade de que sexa fumador?