13 Combinatoria y probabilidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Un experimento consiste en contar el número de hojas dañadas por insectos en una planta. Sean los sucesos *A* = "el número de hojas dañadas es más de 25" y *B* = "el número de hojas dañadas está entre 20 y 35". Describe los sucesos $B - A$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$.

$B - A$: El número de hojas dañadas está entre 20 y 25.

$\overline{A} \cap \overline{B}$: El número de hojas dañadas es menor de 20.

3. En el lanzamiento de un dado dodecaédrico con las caras numeradas del 1 al 12, se consideran los sucesos *A* = "salir impar" y *B* = "salir primo". Comprueba que se cumplen las reglas de De Morgan.

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Los sucesos *A* y *B* están formados por $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Primera Ley de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \{4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad \overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \{4, 6, 8, 10, 12\}$$

Por tanto, queda comprobada la primera ley de De Morgan.

Segunda Ley de De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$A \cap B = \{3, 5, 7, 11\} \Rightarrow \overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

$$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad \overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

De esta manera, queda comprobada la segunda ley de De Morgan.

4. Ejercicio resuelto.

5. Usando un ordenador se ha simulado el lanzamiento de dos monedas. La tabla muestra las frecuencias absolutas del suceso *A* = "obtener cara en una moneda y cruz en la otra".

n	10	25	50	100	250	500	750	1000
***f*(*A*)**	3	11	26	55	128	252	373	502

Completa la tabla con las frecuencias relativas y asigna un valor aproximado a la probabilidad de *A*.

La tabla con las correpondientes frecuencias relativas es:

n	10	25	50	100	250	500	750	1000
***f*(*A*)**	3	11	26	55	128	252	373	502
***h*(*A*)**	0,3	0,44	0,52	0,55	0,512	0,504	0,497	0,502

Aproximadamente, el valor de la probabilidad de *A* es *P*(*A*) = 0,5.

6. En una población, se supone que los varones y las mujeres nacen en la misma proporción. De la población se eligen dos bebés al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos bebés sean mujeres? ¿Y de que uno sea varón y otro mujer?

Sean los sucesos A = "elegir bebé varón" y B = "elegir bebé mujer", se tiene que: $P(A)=\frac{1}{2}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$

La probabilidad de que los dos bebés sean mujeres es: $P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=0,25$

La probabilidad de que uno sea varón y otro mujer es: $P(D)=\frac{1}{2}=0,5$

7. Si P es una probabilidad definida sobre el espacio muestral $E=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ con $P(w_1)=0,15$; $P(w_2)=4P(w_4)$ y $P(w_4)=3P(w_3)$, halla $P(w_3)$.

Debe verificarse que todas las probabilidades sean no negativas y que sumen 1. Es decir:

$$P(w_1)+P(w_2)+P(w_3)+P(w_4)=1$$

Como se tiene que:

$$P(w_2)=4P(w_4)=4\cdot 3P(w_3)=12P(w_3)$$

$$0,15+12P(w_3)+P(w_3)+3P(w_3)=1\Rightarrow 16P(w_3)=0,85\Rightarrow P(w_3)=\frac{0,85}{16}=0,053125$$

Las probabilidaddes de los restantes resultados son:

$$P(w_2)=0,6375 \text{ y } P(w_4)=0,159475$$

8 a 10. Ejercicios resueltos.

11. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es *x*, mientras que con otra moneda esa probabilidad es *y*. Se lanzan las dos monedas. Calcula la probabilidad de:

a) No obtener cara.

b) Obtener exactamente una cara.

c) Obtener dos caras.

¿Es posible elegir *x* e *y* de modo que las probabilidades de los apartados a, b y c sumen 1?

El espacio muestral está formado por $E=\{CC,CX,XC,XX\}$. Sean $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

a) Sea A = “no obtener cara” que es equivalente a A = “obtener dos cruces”, su probabilidad es:

$$P(A)=P(XX)=(1-x)(1-y)=1-x-y+xy$$

b) Sea B = “obtener exactamente una cara”

$$P(B)=P(CX,XC)=x(1-y)+y(1-x)=x+y-2xy$$

c) Sea D = “obtener dos caras”

$$P(D)=P(CC)=xy$$

Para ver si es posible elegir x e y de modo que las probabilidades de los apartados a, b y c sumen 1:

$$P(A)+P(B)+P(D)=1\Rightarrow 1-x-y+xy+x+y-2xy+xy=1\Rightarrow 1=1$$

Es decir, cualesquiera que sean $x, y\in[0,1]$, la suma de las probabilidades es 1. Ello se debe a que los sucesos A, B y D forman una partición del espacio muestral.

12. Dados los sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio, con $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,2$, calcula las probabilidades de que:

a) Al menos uno de los sucesos *A* o *B* ocurra.

b) *A* o *B* ocurran, pero no los dos.

c) No ocurra ninguno de los dos sucesos.

a) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,3 - 0,2 = 0,6$$

b) En este caso se trata del suceso $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) - (A \cap B)$:

$$P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,2 = 0,4$$

c) Debe calcularse la probabilidad del suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$. Utilizando la ley de De Morgan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

13. Sean los sucesos *A*, *B* y *C* asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A) = 0,53$, $P(B) = 0,54$, $P(C) = 0,43$, $P(A \cap B) = 0,2$, $P(A \cup C) = 0,71$, $P(B \cup C) = 0,82$ y $P(A \cap B \cap C) = 0,05$, calcula:

a) $P(A \cap C)$

b) $P(B \cap C)$

c) $P(A \cup B \cup C)$

d) $P(A \cap \overline{B} \cap C)$

e) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

f) $P(\overline{A} \cup B \cup C)$

Se deben utilizar las propiedades de la probabilidad y, en caso necesario, acudir a un diagrama de Venn:

a) En este caso:

$$P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0,53 + 0,43 - 0,71 = 0,25$$

b) De la misma forma que en el apartado anterior:

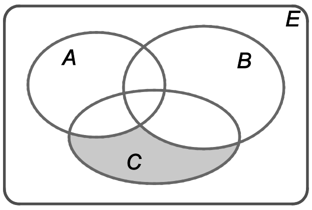
$$P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C) = 0,54 + 0,43 - 0,82 = 0,15$$

c) La probabilidad de la unión de tres sucesos se expresa:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$
$$= 0,53 + 0,54 + 0,43 - 0,20 - 0,25 - 0,15 + 0,05 = 0,95$$

d) Utilizando un diagrama de Venn, se puede ver que:

$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0,25 - 0,05 = 0,20$$



$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

e) Con la ayuda de un diagrama de Venn, se puede ver que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$$
$$= 0,43 - 0,25 - 0,15 + 0,05 = 0,08$$

f) Este suceso es el suceso contrario del suceso del apartado e, es decir:

$$\overline{A \cap \overline{B} \cap \overline{C}} = \overline{A} \cup B \cup C$$

Entonces:

$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0,53 - 0,2 - 0,25 + 0,05 = 0,13$$

$$P(\overline{A} \cup B \cup C) = 1 - P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - 0,13 = 0,87$$

14. En una convención, el 80 % de los asistentes habla inglés, el 50 %, español, y el 90 %, al menos uno de los dos idiomas. De la convención se elige una persona al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Hable los dos idiomas.

b) Hable español, pero no inglés.

c) No hable ninguno de los dos idiomas.

d) No hable al menos uno de los dos idiomas.

Sean los sucesos *A* = “la persona elegida habla inglés”, *B* = “la persona elegida habla español”. Se tiene que:

$$P(A) = 0{,}8\ ,\ P(B) = 0{,}5 \text{ y } P(A \cup B) = 0{,}9$$

a) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}9 = 0{,}4$$

b) En esta ocasión es la probabilidad del suceso $B - A$:

$$P\left(B - A\right) = P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$$

c) Ahora se pide la probabilidad del suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$. Aplicando una de las leyes de De Morgan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

d) Debe calcularse la probabilidad del suceso $\overline{A} \cup \overline{B}$. Por una de las leyes de De Morgan y el resultado del apartado a, se tiene:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

15 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Una bolsa contiene tres bolas numeradas 1, 2, 3. De la bolsa se extrae una bola al azar, se anota su número y se devuelve a la bolsa. Seguidamente se extrae una segunda bola. Calcula la probabilidad de que el número más alto de los extraídos sea el 2.

En la bolsa hay tres elementos (bolas) y se realizan 2 extracciones con reemplazamiento. Los resultados posibles, que pueden considerarse equiprobables, son $VR_{3,2} = 9$, ya que importa el orden en que se extraen las bolas y los números se pueden repetir.

Si el número más alto extraído es el 2, los resultados favorables serían 11, 12 y 21. Es decir, el número de resultados favorables es 3. Aplicando la regla de Laplace:

$$P(\text{número más alto extraído sea 2}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

19. En un torneo triangular de baloncesto, dos de los equipos tienen la misma probabilidad de ganar y el tercer equipo tiene el doble de probabilidad de ganar que los otros dos. Calcula la probabilidad que tiene cada equipo de ganar el torneo.

Sean *A*, *B* y *C* los equipos y también los sucesos consistentes en que cada uno de ellos gane el torneo. Sea:

$$P(A) = P(B) = p \text{ y } P(C) = 2p \quad \text{con } p > 0$$

Las probabilidades deben sumar 1, luego:

$$p + p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

Por tanto,

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{4} \text{ y } P(C) = \frac{1}{2}$$

20. Se hacen tres lanzamientos de un dado. Si en el primer lanzamiento sale 2, ¿qué es más probable que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?

El conjunto de resultados posible es:

$$E = \left\{ \begin{matrix} 211, 212, 213, 214, 215, 216, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 231, 232, 233, 234, 235, 236, \\ 241, 242, 243, 244, 245, 246, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 261, 262, 263, 264, 265, 266 \end{matrix} \right\}$$

Donde por ejemplo, 212, representa el resultado de que el primer lanzamiento salga 2, el segundo 1 y el tercero 2. Aplicando la regla de Laplace:

El suceso A = "la suma de los tres números es par" luego los tres números son pares o dos de ellos son impares.

$$A = \{211, 213, 215, 222, 224, 226, 231, 233, 235, 242, 244, 246, 251, 253, 255, 262, 264, 266\}$$

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } A}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

El suceso B = "la suma de los tres numeros es impar" para queocurra esto un número es impar y los otros pares.

$$B = \{212, 214, 216, 221, 223, 225, 232, 234, 236, 241, 243, 245, 252, 254, 256, 261, 263, 265\}$$

$$P(B) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } B}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

La probabilidad es la misma.

21. Una urna contiene una bola roja y una blanca. Se extrae una bola de la urna y se anota su color y se devuelve a la urna. Se repite el experimento dos veces más, calcula la probabilidad de que:

a) Solo una bola sea roja.

b) Al menos una bola sea roja.

c) Las tres sean blancas.

d) Sean del mismo color.

El conjunto de resultados posibles equiprobables es $E = \{BBB, BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB, RRR\}$

Donde por ejemplo, BRB, representa el resultado en el que la primera bola sea blanca, la segunda roja y la tercera blanca. Para calcular las probabilidades se puede aplicar la regla de Laplace.

a) El suceso A = “solo una bola es roja” es $A = \{BBR, BRB, RBB\}$, y su probabilidad es:

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } A}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{3}{8}$$

b) El suceso C = “al menos una bola es roja” es $C = \{BBR, BRB, RBB, BRR, RBR, RRB, RRR\}$, de modo que:

$$P(C) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } C}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{7}{8}$$

c) El suceso D = “las tres son blancas” es $D = \{BBB\}$, por lo que:

$$P(D) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } D}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{1}{8}$$

En esta ocasión se puede proceder, también, por el suceso contrario, ya que $D = \overline{C}$.

d) El suceso F = "son del mismo color" es $F = \{BBB, RRR\}$, luego:

$$P(F) = \frac{\text{nº de resultados favorables al suceso } F}{\text{nº de resultados posibles}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

22. Un dado octaédrico está trucado de forma que la probabilidad de cada cara es proporcional al cuadrado del número que aparece en ella. Si se lanza el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un divisor de 12?

Los números que aparecen en las caras son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. De modo que si llamas p a la probabilidad de que aparezca en la cara 1, es decir, $P(1)=p$ se tiene que las siguientes probabilidades son $P(2)=4p$, $P(3)=9p$, $P(4)=16p$, $P(5)=25p$, $P(6)=36p$, $P(7)=49p$, $P(8)=64p$.

Como la suma de estas probabilidades es 1 se tiene que:

$$p+4p+9p+16p+25p+36p+49p+64p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{204}$$

La probabilidad pedida es la que aparezca en las caras 1, 2, 3, 4 o 6, luego $P(D)=\frac{66}{204}=\frac{11}{34}$.

23. Ejercicio interactivo.

24. Ejercicio resuelto.

25. Se lanza un dado dos veces consecutivas. Calcula la probabilidad de que:

a) La suma de los puntos sea 5.

b) La diferencia de puntuaciones, en valor absoluto, en los dos lanzamientos sea menor que 3.

c) El producto de los puntos sea múltiplo de 6.

El número de resultados posibles equiprobables al lanzar un dado dos veces consecutivas es $VR_{6,2}=6^2=36$

a) El número de resultados favorables al suceso A = "la suma de los puntos es 5" es 4, por tanto:

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

b) El número de resultados favorables al suceso B = "la diferencia de puntuaciones es menor que 3" es 24, luego:

$$P(B)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

c) El número de resultados favorables al suceso C = "el producto de los puntos es múltiplo de 6" es 6, por lo que:

$$P(C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

26. Con las cifras del 1 al 9 se forman al azar números de 4 cifras. Calcula la probabilidad de que el número formado sea múltiplo de cinco si:

a) El número tiene las cifras distintas.

b) El número puede tener cifras repetidas.

a) Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, se pueden formar $V_{9,4}=9\cdot8\cdot7\cdot6=3024$ números de 4 cifras distintas. Sea el suceso A = "el número formado es múltiplo de 5". Los resultados favorables al suceso A son $V_{8,3}=8\cdot7\cdot6=336$, puesto que para ser múltiplo de 5 el número formado debe acabar en 5, y quedarían 8 cifras para 3 lugares. Es decir:

$$P(A)=\frac{336}{3024}=\frac{1}{9}$$

b) Si las cifras se pueden repetir, el número de resultados posibles son $VR_{9,4}=9^4=6561$ y los resultados favorables al suceso A = "el número formado acaba en 5" son ahora $VR_{9,3}=9^3=729$.

$$P(A)=\frac{729}{6561}=\frac{1}{9}$$

27. Se lanzan tres dados y se observan los resultados obtenidos. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Tres caras iguales.

b) Suma igual a 10.

a) En el experimento de lanzar tres dados, el número de resultados posibles equiprobables es $VR_{6,3} = 6^3 = 216$

Sea el suceso A = "obtener tres caras iguales". Los resultados favorables al suceso A son 6, ya que $A = \{111, 222, 333, 444, 555, 666\}$.

Luego:

$$P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

b) Los resultados favorables al suceso B = "obtener suma igual a 10" son (entre paréntesis sus respectivas permutaciones) 136 (6), 145 (6), 226 (3), 235 (6), 244 (3), 334 (3).

En total 27 resultados favorables al suceso B. Luego:

$$P(B) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

28. Se lanzan simultáneamente un dado y una moneda. Calcula la probabilidad de:

a) Obtener par en el dado.

b) Obtener cara y número impar.

El espacio muestral consta de 12 resultados posibles $E = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1X, 2X, 3X, 4X, 5X, 6X\}$

Los números indican los resutados del dado y C (cara) y X (cruz) los de la moneda.

a) Los resultados favorables al suceso A = "obtener par en el dado" son 6, por lo que:

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

b) Para el suceso B = "obtener cara y número impar" los resultados son 3, ya que $B = \{1C, 3C, 5C\}$, entonces:

$$P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $VR_{x,3} - V_{x,2} = 2V_{x,3} + 4$

b) $\dfrac{V_{x,2}}{VR_{x,2}} + \dfrac{V_{x,x-1}}{x!} = \dfrac{3}{2}$

a) Desarrollando y simplificando la expresión, resulta:

$$x^3 - x(x-1) = 2x(x-1)(x-2) + 4$$

$$x^3 - x^2 + x = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 4 = 0$$

Que admite la factorización:

$$(x-4)(x^2 - x - 1) = 0$$

Como el segundo factor no tiene solución entera, el resultado es, por tanto $x = 4$.

b) Procediendo de forma similar al apartado anterior:

$$\frac{x(x-1)}{x^2} + \frac{x!}{x!} = \frac{3}{2}$$

$$2(x^2 - x) + 2x^2 = 3x^2$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$$

Por lo que la única solución válida es $x = 2$.

30. Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 rojas. De la bolsa se extraen 3 bolas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Haya al menos una bola roja entre las extraídas.

b) Las 3 sean del mismo color.

Al no importar el orden en que se realizan las extracciones (pueden extraerse las tres bolas simultáneamente), el número de resultados posibles es:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

a) Si A = "al menos una bola roja entre las tres extraídas", su contrario es $\overline{A}$ = "ninguna de las tres es roja" (las tres son blancas)

Los resultados favorables al suceso $\overline{A}$ y su probabilidad son:

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{4}{35}$$

De manera que:

$$P(A) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

b) El suceso C = "las tres sean del mismo color" se puede escribir como la unión de dos sucesos incompatibles: $\overline{A}$: "las tres son blancas" y B: "las tres son rojas" . De esta manera:

$$P(C) = P(\overline{A}) + P(B) = \frac{4}{35} + \frac{1}{35} = \frac{1}{7}$$

31. Se reparten al azar 12 folios entre 4 niños, ¿cuál es la probabilidad de que a uno de los cuatro no le toque ningún folio?

Para contar el número de resultados posibles al repartir entre cuatro niños doce folios, se pueden utilizar combinaciones con repetición.

Se colocan en línea los 12 folios y 3 separadores para indicar los que corresponden a cada niño. Por ejemplo:

F / *FFF* / *FFFFF* / *FFF*

Así el niño A se ha llevado 1 folio, el niño B 3 folios, el niño C 5 folios y el niño D 3 folios.

De esta forma, repartir 12 folios entre 4 niños, equivale a elegir 3 elementos (o 12) de los 15 (los 12 folios y los 3 separadores) no importando el orden. Es decir:

$$CR_{4,12} = C_{15,3} = \binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$$

Sea el suceso A = "a uno de los cuatro no le toca ningún folio"

Para contar el número de resultados favorables, debe elegirse en primer lugar el niño que se queda sin folios (4 posibilidades) y por cada una de estas, se reparten los 12 folios entre los 3 niños restantes niños. Esto es:

$$4CR_{3,12} = 4C_{14,2} = 4 \cdot \binom{14}{2} = 4 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} = 364$$

Por último, aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{364}{455} = \frac{4}{5}$$

32. Ejercicio interactivo.

33 y 34. Ejercicios resueltos.

35. Un local comercial, dispone de dos sistemas de alarma, A y B interconectados. La probabilidad de que el sistema A funcione correctamente es 0,9. Además, en la mitad de las ocasiones ha fallado el B, una vez que también había fallado el sistema A. Mientras que la probabilidad de que una vez que ha fallado B también lo haya hecho A es 0,25. Calcula la probabilidad de que:

a) El sistema B no funcione.

b) No funcione ninguno de los dos sistemas.

c) Funcione al menos uno de los sistemas.

Sean los sucesos A = "El sistema A funciona correctamente", B = "El sistema B funciona correctamente". La información disponible es:

$$P(A)=0{,}9\ ,\ P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=0{,}5\ ,\ P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=0{,}25$$

Se deben calcular las probabilidades de B y de $A\cap B$, para ello:

$$P(B\mid A)=0{,}5\Rightarrow P\left(B\mid\overline{A}\right)=0{,}5\Rightarrow\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=0{,}5\Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=0{,}5\cdot P\left(\overline{A}\right)=0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}05$$

De manera que resulta la ecuación $P(B)-P(A\cap B)=0{,}05$. Por otra parte,

$$P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=0{,}25\Rightarrow P\left(A\mid\overline{B}\right)=0{,}75\Rightarrow\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=0{,}75\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=0{,}75(1-P(B))$$

Sustituyendo y simplificando se obtiene una segunda ecuación: $-0{,}75P(B)+P(A\cap B)=0{,}15$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} P(B)-P(A\cap B)=0{,}05 \\ -0{,}75P(B)+P(A\cap B)=0{,}15 \end{cases}$$

$$P(B)=0{,}8\ ,\ P(A\cap B)=0{,}75$$

a) La probabilidad de que el sistema B no funcione, se obtiene de forma inmediata:

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}8=0{,}2$$

b) La probabilidad de que no funcione ningún sistema viene dada por el suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)=0{,}25\cdot 0{,}2=0{,}05$$

c) La probabilidad de que funcione al menos un sistema se obtiene mediante una de las leyes de De Morgan:

$$P(A\cup B)=1-P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-0{,}05=0{,}95$$

36. Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}6$ y $P(A\cup B)=0{,}9$, calcula $P(A\mid\overline{B})$ y $P(B\mid\overline{A})$.

Se calcula, en primer lugar, la probabilidad del suceso intersección de A y B:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}7+0{,}6-0{,}9=0{,}4$$

Entonces:

$$P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{0{,}7-0{,}4}{1-0{,}6}=0{,}75$$

$$P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)}=\frac{0{,}6-0{,}4}{1-0{,}7}=0{,}6667$$

37. En una población, de cada cien bebés que nacen, 30 son rubios y el resto morenos. De los rubios, el 80 % tiene los ojos azules, mientras que tienen ojos azules el 20 % de los morenos. Si se elige un bebé al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea rubio y tenga los ojos azules.

b) Sea moreno y no tenga los ojos azules.

Sean los sucesos *R* = "el bebé es rubio", *M* = "el bebé es moreno" y *A* = "el bebé tiene los ojos azules". Por los datos proporcionados se sabe que: $P(R)=0{,}3$, $P(M)=0{,}7$, $P(A\mid R)=0{,}8$ y $P(A\mid M)=0{,}2$.

a) Se trata de la probabilidad del suceso $R\cap A$

$$P(R\cap A)=P(A\mid R)P(R)=0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}24$$

b) En este caso se debe calcular la probabilidad del suceso $M\cap \overline{A}$

$$P\left(M\cap \overline{A}\right)=P(\overline{A}\mid M)P(M)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56$$

Siendo $P(\overline{A}\mid M)=1-P(A\mid M)=1-0{,}2=0{,}8$

38. En una campaña de prevención de la gripe se vacuna al 40 % de la población en riesgo. Se sabe que la enfermedad afecta al 20 % de los vacunados y al 50 % de los no vacunados. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:

a) Enferme y haya sido vacunada.

b) Enferme y no haya sido vacunada.

Sean los sucesos *V* = "la persona ha sido vacunada" y *F* = "la persona enferme".

Se tiene que:

$$P(V)=0{,}4\ ,\ P(\overline{V})=0{,}6\ ,\ P(F\mid V)=0{,}2\ ,\ P\left(F\mid \overline{V}\right)=0{,}5$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $V\cap F$, que se calcula:

$$P(V\cap F)=P(F\mid V)P(V)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$$

b) En este caso, se trata del suceso $\overline{V}\cap F$, cuya probabilidad es:

$$P\left(\overline{V}\cap F\right)=P\left(F\mid \overline{V}\right)P\left(\overline{V}\right)=0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}3$$

39. Ejercicio resuelto.

40. Dos máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1 % y 10 %, respectivamente. Las piezas fabricadas en una hora están mezcladas y elegimos una al azar. Calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B y no sea defectuosa.

Sean los sucesos *A* = "la pieza ha sido fabricada por la máquina A", *B* = "la pieza ha sido fabricada por la máquina B" y *C* = "la pieza es defectuosa".

$$P(A)=\frac{50}{300}=\frac{1}{6}\ ;\ P(B)=\frac{250}{300}=\frac{5}{6}\ ;\ P(D\mid A)=0{,}01;\ P(D\mid \mathrm{B})=0{,}1$$

Se pide la probabilidad del suceso $B\cap\overline{D}$:

$$P\left(B\cap\overline{D}\right)=P\left(\overline{D}\mid B\right)P(B)=0{,}9\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{4}$$

Donde $P\left(\overline{D}\mid B\right)=1-P(D\mid B)=1-0{,}1=0{,}9$

41. Se lanza una moneda tres veces. Sea el suceso A_j = “en el lanzamiento j se obtiene CRUZ” (j= 1, 2, 3). Los sucesos A_j ¿son mutuamente independientes?

El espacio muestral correspondiente al lanzamiento de una moneda tres veces es:

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Si la moneda está equilibrada, los resultados del espacio muestral son equiprobables. Además, los sucesos son:

$$A_1 = \{XCC, XCX, XXC, XXX\} \quad A_2 = \{CXC, CXX, XXC, XXX\} \quad A_3 = \{CCX, CXX, XCX, XXX\}$$

De esta manera, mediante la regla de Laplace, se obtiene que:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte:

$$A_1 \cap A_2 = \{XXC, XXX\}\ ,\ A_1 \cap A_3 = \{XCX, XXX\}\ ,\ A_2 \cap A_3 = \{CXX, XXX\}$$

De manera que:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Y puede comprobarse que:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{4} \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3 \text{ e } i \neq j$$

Es decir, los sucesos son independientes dos a dos.

Además, el suceso intersección de los tres es:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{XXX\}$$

Con lo que su probabilidad es:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Y, por tanto, los sucesos son mutuamente independientes, puesto que son independientes dos a dos e independientes en conjunto.

42. En una atracción de feria, dos personas, A y B, lanzan una pelota a un blanco en movimiento. En promedio, A acierta una de cada tres veces, y B, una de cada cuatro. Si A lanza en primer lugar y luego se van turnando, ¿cuál es la probabilidad de que el primer acierto en el blanco se produzca en el tercer lanzamiento? ¿Y en el 5.º?

Considera los sucesos A_i = “A acierta en el lanzamiento i” i= 1,3,5,... y B_i = “B acierta en el lanzamiento i” i=2,4,6,...

Los lanzamientos son independientes y en cada lanzamiento las probabilidades de acertar de A y B son:

$$P(A_i) = \frac{1}{3}\ ,\ P(B_i) = \frac{1}{4}$$

Para que el primer acierto en el blanco se produzca en el tercer lanzamiento, el suceso que ocurre es $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3$

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

De la misma forma, el primer acierto en el quinto lanzamiento $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{B_4} \cap A_5$

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{B_4} \cap A_5) = P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(\overline{A_3})P(\overline{B_4})P(A_5) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

43. Ejercicio interactivo.

44 a 46. Ejercicios resueltos.

47. Una bolsa contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. De la bolsa se extrae al azar una bola y se reemplaza por otra del otro color. A continuación se extrae una segunda bola. Calcula la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

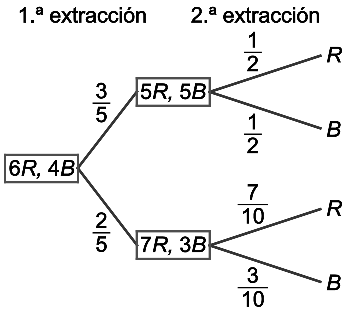
b) Dos bolas extraídas sean blancas.

Sean los sucesos R_1 = "la bola en la primera extracción es roja", B_1 = "la bola en la primera extracción es blanca".

$$P(R_1)=\frac{3}{5} \quad ; \quad P(B_1)=\frac{2}{5}$$

Para la segunda extracción, la composición de la bolsa es $U_1=(5R,5B)$ con probabilidad $\frac{3}{5}$ y $U_2=(7R,3B)$ con probabilidad $\frac{2}{5}$.

La situación se describe en el diagrama de árbol.



a) Sea R_2 = "la bola en la segunda extración es roja". Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(R_2)=P(R_2 \mid U_1)P(U_1)+P(R_2 \mid U_2)P(U_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{5}=\frac{29}{50}$$

b) Si B_2 = "la bola en la segunda extracción es blanca" Se debe calcular la probabilidad del suceso:

$$P(B_1\cap B_2)=P(B_2 \mid B_1)P(B_1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{50}=\frac{3}{25}$$

48. Una epidemia de gripe afecta al 10 % de la población. El sistema de diagnóstico utilizado da positivo en una persona enferma en el 90 % de los casos, y negativo en una persona sana, en el 95 % de los casos. De la población se elige una persona al azar. Calcula la probabilidad de que el test diagnóstico de negativo.

Se considera el suceso A = "la persona está afectada por la enfermedad", junto con su contrario $\overline{A}$:

$$P(A)=0{,}1 \quad , \quad P(\overline{A})=0{,}9$$

Además, sea D = "el diagnóstico es positivo" y su contrario $\overline{D}$ = "el diagnóstico es negativo" y se sabe que:

$$P(D \mid A)=0{,}9 \quad , \quad P\left(\overline{D} \mid \overline{A}\right)=0{,}95$$

Se pide la probabilidad del suceso $\overline{D}$. Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{D})=P\left(\overline{D} \mid A\right)P(A)+P\left(\overline{D} \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)=0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}95\cdot 0{,}9=0{,}865$$

Puesto que $P\left(\overline{D} \mid A\right)=1-P(D \mid A)=1-0{,}9=0{,}1$

49. En una auditoría trabajan tres personas, *A*, *B* y *C*. *A* realiza el 30 % de las auditorías de, *B* realiza el 45 % y *C* realiza el resto. El porcentaje de errores de *A*, *B* y *C*, es respectivamente 1 %, 3 % y 2 %. Elegida una inspección al azar, calcula la probabilidad de que no tenga errores.

Se considera el suceso *D* = "no tenga errores". Se sabe que:

$P(D|A)=0{,}99$, $P(D|B)=0{,}97$, $P(D|C)=0{,}98$

Por el teorema de la probabilidad total se tiene:

$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=0{,}3\cdot 0{,}99+0{,}45\cdot 0{,}97+0{,}25\cdot 0{,}98=0{,}9785$

50. El 63 % de los usuarios de móvil en España tiene un *smartphone*. Entre los propietarios de este tipo de teléfono, el 77 % lo emplea para su conexión habitual a internet. Sin embargo, entre los propietarios de otro tipo de teléfono móvil solo el 8 % lo emplea para la conexión habitual a internet. Calcula la probabilidad de conectarse habitualmente a internet a través del teléfono móvil.

Se considera el suceso *A* = "conectarse a Internet a través del móvil". Se sabe que:

$P(A|S)=0{,}77$, $P(A|\overline{S})=0{,}08$

Por el teorema de la probabilidad total se tiene que:

$P(A)=P(S)P(A|S)+P(\overline{S})P(A|\overline{S})=0{,}63\cdot 0{,}77+0{,}37\cdot 0{,}08=0{,}5147$

51 y 52. Ejercicios resueltos.

53. El 30 % de los habitantes de una localidad son jubilados y el 20 % son estudiantes, mientras que el resto ni están jubilados ni son estudiantes. El 80 % de los jubilados, así como el 20 % de los estudiantes y el 40 % del resto de habitantes, son socios del club de fútbol local.

a) Elegido al azar un habitante de esa localidad, calcula la probabilidad de que sea socio del club de fútbol.

b) Elegido al azar un socio del club de fútbol, calcula la probabilidad de que sea jubilado.

c) Elegida al azar una persona que no es socio del club, ¿qué es más probable que sea jubilado o estudiante?

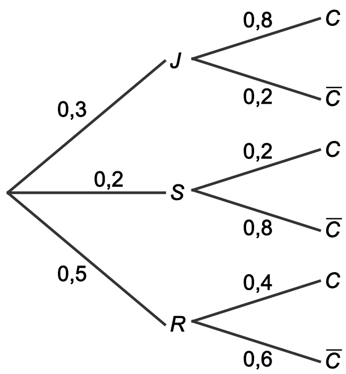
Se consideran los sucesos *J* = “el habitante es jubilado”, *S* = “el habitante es estudiante”, *R* = “el habitante no es jubilado ni estudiante”. Además, sea *C* = “el habitante es socio del club de fútbol”. Se tiene que:

$P(J)=0{,}3$ $P(S)=0{,}2$ $P(R)=0{,}5$ $P(C\mid J)=0{,}8$ $P(C\mid S)=0{,}2$ $P(C\mid R)=0{,}4$

En el diagrama de árbol se describe la situación.

a) $P(C)=P(C\mid J)P(J)+P(C\mid S)P(S)+P(C\mid R)P(R)=0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}48$

b) $P(\mathrm{J}\mid \mathrm{C})=\dfrac{P(C\mid J)P(J)}{P(C)}=\dfrac{0{,}8\cdot 0{,}3}{0{,}48}=0{,}5$



c) Se deben calcular las probabilidades $P(\mathrm{J}\mid \overline{\mathrm{C}})$ y $P(\mathrm{S}\mid \overline{\mathrm{C}})$ y compararlas:

$$P(\mathrm{J}\mid \overline{\mathrm{C}})=\frac{P(J\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(J)-P(J\cap C)}{1-P(C)}=\frac{0{,}3-0{,}24}{1-0{,}48}=0{,}1154$$

Donde $P(J\cap C)=P(C\mid J)P(J)=0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}24$

$$P(\mathrm{S}\mid \overline{\mathrm{C}})=\frac{P(S\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(S)-P(S\cap C)}{1-P(C)}=\frac{0{,}2-0{,}04}{1-0{,}48}=0{,}3077$$

Donde $P(S\cap C)=P(C\mid \mathrm{S})P(S)=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04$

De forma que si la persona elegida al azar no es socio del club de fútbol, entonces es más probable que sea estudiante que jubilado.

54. El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es 120, por la tarde, 150, y por la noche, 30. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde, del 4 %, y por la noche, de un 6 %.

a) Calcula la probabilidad de que se retrase un vuelo con destino a este aeropuerto.

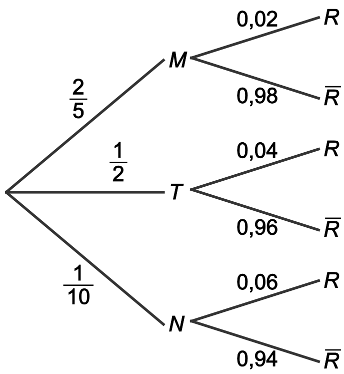
b) Si un vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo nocturno?

Se consideran los sucesos M = “el vuelo es de la mañana”, T = “el vuelo es de la tarde” y N = “el vuelo es de la noche”. Estos tres sucesos, forman una partición del espacio muestral.

Además, sea R = “el vuelo llega con retraso”. El número total de vuelos es 300, de modo que:

$$P(M)=\frac{120}{300}=\frac{2}{5}\quad P(T)=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}\quad P(N)=\frac{30}{300}=\frac{1}{10}\quad P(R\mid M)=0{,}02\quad P(R\mid T)=0{,}04\quad P(R\mid N)=0{,}06$$

El diagrama de árbol ilustra la situación:



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(R)=P(R\mid M)P(M)+P(R\mid T)P(T)+P(R\mid N)P(N)=$$
$$=0{,}02\cdot\frac{2}{5}+0{,}04\cdot\frac{1}{2}+0{,}06\cdot\frac{1}{10}=0{,}034$$

b) Mediante el teorema de Bayes:

$$P(\mathrm{N}\mid \mathrm{R})=\frac{P(R\mid N)P(N)}{P(R)}=\frac{0{,}06\cdot 0{,}1}{0{,}034}=0{,}1765$$

55. Ejercicio interactivo.

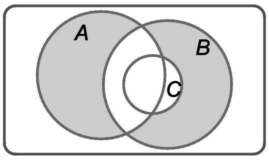
56 a 61. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

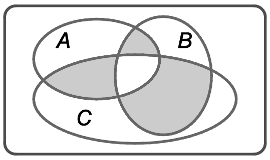
Experimentos aleatorios. Sucesos.

62. En los siguientes diagramas de Venn, obtén la parte coloreada mediante operaciones con sucesos.

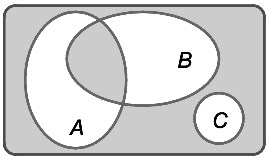
a)



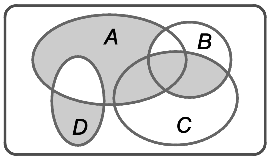
c)



b)



d)



En los cuatro casos, se expresan las partes coloreadas como unión de sucesos mutuamente excluyentes.

a) $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)$

c) $\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)$

b) $(A\cap B)\cup\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)$

d) $(\overline{A}\cap D)\cup(B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{D})$

63. Una tarde de sábado, un joven tiene la posibilidad de realizar, en exclusiva, las siguientes cuatro posibilidades *A* = "ir al cine", *B* = "estudiar", *C* = "hacer deporte" o *D* = "no hacer nada". Describe los sucesos siguientes.

a) $A \cup \left(C \cap \overline{A}\right)$ **b)** $(A - B) \cup \overline{B}$ **c)** $D \cap \left(\overline{A - D}\right)$

a) Aplicando la propiedad distributiva:

$$A \cup \left(C \cap \overline{A}\right) = (A \cup C) \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = A \cup C$$

Entonces, el suceso propuesto se puede describir como "Ir la cine o bien hacer deporte o bien ambas actividades".

b) Teniendo en cuenta que:

$$(A - B) \cup \overline{B} = \overline{B}$$

De modo que el suceso propuesto se puede describir como "No estudiar".

c) En este caso, por una de las leyes de De Morgan y simplificando:

$$D \cap \left(\overline{A - D}\right) = D \cap \left(\overline{A} \cup D\right) = D$$

Es decir, el suceso es "No hacer nada"

Probabilidad y propiedades

64. En un experimento aleatorio, la probabilidad de un suceso *A* es dos veces la probabilidad de otro suceso *B*, y la suma de la probabilidad de *A* y la probabilidad del suceso contrario a *B* es 1,3. Se sabe, además, que la probabilidad de la intersección de *A* y *B* es 0,18. Calcula la probabilidad de que:

a) Se verifique el suceso *A* o se verifique el suceso *B*.

b) Se verifique el suceso contrario de *A* o se verifique el suceso contrario de *B*.

Llamamos $P(A) = x \quad P(B) = y$

Con lo que $P(\overline{B}) = 1 - y$

Planteando el sistema de ecuaciones y resolviendolo se obtienen los valores de *x* e *y:*

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + 1 - y = 1{,}3 \end{cases} \Rightarrow 2y + 1 - y = 1{,}3 \Rightarrow y = 0{,}3 \quad x = 0{,}6$$

De este modo, completando con la probabilidad del suceso intersección, se tiene que:

$$P(A) = 0{,}6 \quad P(B) = 0{,}3 \quad P(A \cap B) = 0{,}18$$

a) Se trata de la probabilidad del suceso unión de *A* y *B*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}18 = 0{,}72$$

b) En este caso, se pide la probabilidad del suceso $\overline{A} \cup \overline{B}$, que se puede obtener utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$$

65. Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios tales que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$ **b)** $P(A \cup B)$ **c)** $P(A \cap \overline{B})$

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7 \Rightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,7 \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0,7 = 0,3$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,4 - 0,3 = 0,7$

c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,3 = 0,3$

Asignación de probabilidades. Espacios finitos

66. Se lanza 3 veces consecutivas un dado equilibrado. Calcula la probabilidad de:

a) Obtener al menos un uno.

b) Obtener un seis solo en el tercer lanzamiento.

El número de resultados posibles equiprobables al lanzar tres veces un dado equilibrado es $VR_{6,3} = 6^3 = 216$.

En los cálculos de las probabilidades se puede utilizar la regla de Laplace.

a) Sea el suceso *A* = “obtener al menos un uno” y su contrario es $\overline{A}$ = “no obtener ningún uno”.

Los resultados favorables al suceso $\overline{A}$ son $VR_{5,3} = 5^3 = 125$. Luego:

$$P(\overline{A}) = \frac{125}{216} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

b) Si solo debe aparecer un seis en el tercer lanzamiento, este queda fijo, y en los dos primeros puede haber $VR_{5,2} = 25$ resultados favorables. Por lo que la probabilidad del suceso *B* = “obtener solo seis en el tercer lanzamiento” es:

$$P(B) = \frac{25}{216}$$

67. Un tarro contiene 25 caramelos de naranja, 12 de limón y 8 de café. Se extraen dos caramelos al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambos sean de naranja.

b) Ambos sean del mismo sabor.

c) Ninguno sea de café.

Suponiendo que todos los resultados posibles son equiprobables, se aplica la regla de Laplace.

El número de resultados posibles de extraer 2 caramenlos de un tarro que tiene 45 caramelos es:

$$C_{45,2}=\binom{45}{2}=\frac{45\cdot 44}{2}=990$$

a) Sea el suceso *N* = “los dos caramelos son de naranja”, el número de resultados favorables al suceso *N* y su probabilidad son:

$$C_{25,2}=\binom{25}{2}=\frac{25\cdot 24}{2}=300 \Rightarrow P(N)=\frac{300}{990}=\frac{10}{33}=0{,}30303$$

b) Puede que los dos caramelos sean naranja (*N*), como en el apartado a, o los dos sean de limón (*L*) o los dos sean de café (*C*).

Los resultados favorables al suceso *L* y su probabilidad son:

$$C_{12,2}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2}=66 \Rightarrow P(L)=\frac{66}{990}=\frac{1}{15}=0{,}06667$$

Los resultados favorables al suceso *C* y su probabilidad son:

$$C_{8,2}=\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{2}=28 \Rightarrow P(C)=\frac{28}{990}=\frac{14}{495}=0{,}0283$$

Como los tres sucesos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de la unión de los tres es:

$$P(N\cup L\cup C)=P(N)+P(L)+P(C)=\frac{300}{990}+\frac{66}{990}+\frac{28}{990}=\frac{394}{990}=\frac{197}{495}=0{,}398$$

c) Si ninguno es de café, los dos caramelos deben ser extraídos de los que son de naranja o limón, en total 37 caramelos. De modo que los resultados favorables al suceso *D* = “ninguno de los dos es de café” y su probabilidad son:

$$C_{37,2}=\binom{37}{2}=\frac{37\cdot 36}{2}=666 \Rightarrow P(D)=\frac{666}{990}=\frac{37}{55}=0{,}67272$$

68. Con las cifras 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, se forman al azar números de 4 cifras distintas. Calcula la probabilidad de que el número sea par y mayor que 5000.

El número total de números de 4 cifras distintas que se pueden formar con las 7 cifras (resultados posibles) es:

$$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Sea el suceso *A* = "el número formado es par y mayor que 5000".

Para contar el número de resultados favorables al suceso *A*, se debe tener en cuenta que:

- Hay 4 cifras pares que pueden ocupar la posición de las unidades: 2, 4, 6, 8
- Hay 4 cifras que pueden ocupar la posición de las decenas de millar: 5, 6, 7, 8
- Si la cifra de las unidades es 2 o 4, se dispone de las cuatro cifras (5, 6, 7, 8) para las unidades de millar y por cada una de esas posibilidades, las dos posiciones centrales pueden ocuparse con las restantes cinco cifras. En total: $2 \cdot 4 \cdot V_{5,2} = 160$
- Si la cifra de las unidades es 6 u 8, se dispone de tres cifras (5, 7, 8 o 5, 6, 7 respectivamente) para las decenas de millar y por cada una de esas posibilidades, las dos posiciones centrales pueden ocuparse con las restantes cinco cifras. En total: $2 \cdot 3 \cdot V_{5,2} = 120$

En total, el número de resultados favorable es $160 + 120 = 280$.

Y, suponiendo que los resultados posibles son equiprobables, se puede aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad del suceso *A:*

$$P(A) = \frac{280}{840} = \frac{1}{3}$$

69. Se elige al azar un número de 4 cifras distintas escrito con las cifras 1, 2, 3 y 4. Calcula la probabilidad de que en dicho número las cifras 2 y 3 aparezcan seguidas y en el orden 23.

Con las cuatro cifras se pueden formar $P_4 = 4! = 24$ números de cifras distintas. Esos son los resultados posibles.

Sea el suceso *A* = "Las cifras 2 y 3 aparecen seguidas y en el orden 23". El 2 y el 3 aparecen seguidos en ese orden solo en tres posiciones, como se puede ver en la tabla:

2	3		
	2	3	
		2	3

Por cada una de estas posiciones, las otras dos cifras pueden ordenarse de $P_2 = 2! = 2$ formas posibles. En total $3 \cdot 2 = 6$ resultados favorables. De esta manera, por la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

Probabilidad condicionada. Independencia

70. Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cap B) = 0,1$. Calcula cada una de las siguientes probabilidades.

a) $P(A \cup B)$ **b)** $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ **c)** $P(A \mid B)$ **d)** $P(\overline{A} \cap B)$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,1 = 0,8$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

c) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,4} = 0,25$

d) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$

71. **Sean *A* y *B* dos sucesos de un experimento aleatorio, con $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6$ y $P(A \mid B) = 0{,}5$. Calcúlense:**

a) $P(B)$ **b)** $P(A \cup B)$ **c)** $P(A)$ **d)** $P(\overline{B} \mid \overline{A})$

a) Para el cálculo de $P(B)$, se procede a partir de la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \mid B)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$$

b) En este caso, se tiene en cuenta la ley de De Morgan $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6 \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}6 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

c) De las propiedades de la probabilidad y los resultados de los apartados anteriores:

$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$$

d) De la definición de probabilidad condicionada:

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}6}{1 - P(A)} = \frac{0{,}6}{1 - 0{,}3} = \frac{6}{7}$$

72. **Se consideran tres sucesos *A*, *B* y *C* de un experimento aleatorio tales que:**

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3},\ P(C) = \frac{1}{4},\ P(A \mid B) = P(C \mid A) = \frac{1}{2},\ P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3},\ P(A \cap B \cap C) = 0}$$

Calcula $P(C \cap B)$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$.

De las propiedades de la probabilidad:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \qquad P(A \cap C) = P(C \mid A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Y las demás probabilidades son conocidas excepto $P(B \cap C)$. Despejando esta, resulta:

$$P(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 0 - \frac{2}{3} = 0$$

Mientras que, utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0 = 1$$

73. La probabilidad de que tenga lugar el suceso *A* es $\frac{2}{3}$, la probabilidad de que no ocurra el suceso *B* es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que ocurra el suceso *A* o el suceso *B* es $\frac{19}{24}$. Calcula:

a) La probabilidad de que ocurran a la vez el suceso *A* y el suceso *B*.

b) La probabilidad de que no ocurra *A* y no ocurra *B*.

c) La probabilidad de que ocurra *A* sabiendo que ha ocurrido *B*.

d) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? ¿Por qué?

Las probabilidades dadas son: $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(\overline{B})=\frac{1}{4}$ y $P(A\cup B)=\frac{19}{24}$.

Y de aquí que $P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

a) Se trata del suceso $A\cap B$:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{19}{24}=\frac{5}{8}$$

b) Ahora es el suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{19}{24}=\frac{5}{24}$$

c) Se pide la probabilidad condicionada $P(A\,|\,B)$:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{6}$$

d) Los sucesos *A* y *B* son independientes si y solo si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$:

$$P(A\cap B)=\frac{5}{8}\qquad P(A)P(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

Por tanto, los sucesos *A* y *B* no son independientes.

74. La probabilidad de que ocurra el contrario de un suceso *A* es $\frac{1}{3}$, la probabilidad de un suceso *B* es $\frac{3}{4}$ y la probabilidad de que ocurran a la vez *A* y *B* es $\frac{5}{8}$. Se pide:

a) Probabilidad de que ocurran el suceso *A* o el suceso *B*.

b) Probabilidad de que no ocurra ni el suceso *A* ni el suceso *B*.

c) Probabilidad de que ocurra *A*, sabiendo que ha ocurrido *B*.

d) ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? Razona la respuesta.

Las probabilidades dadas son $P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{3}{4}$ y $P(A\cap B)=\frac{5}{8}$. Y, por tanto $P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

a) Se trata de la probabilidad de la unión de los sucesos *A* y *B*, es decir:

$$P(A\cup B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{19}{24}$$

b) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$, que utilizando las leyes de De Morgan se puede escribir:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{19}{24}=\frac{5}{24}$$

c) La probabilidad de *A* condicionada a que ha ocurrido *B* es:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$$

d) No son independientes, puesto que puede comprobarse rápidamente que:

$$P(A\mid B)=\frac{5}{6}\neq P(A)=\frac{2}{3}$$

75. Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios independientes de los que se conoce que $P(A)=0{,}5$ y $P(B)=0{,}3$.

a) Indica, razonadamente, si *A* y *B* son sucesos incompatibles.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda *A* y no suceda *B*?

c) Halla la probabilidad de que no ocurra el suceso *A* si se sabe que no ha ocurrido el suceso *B*.

d) Calcula $P(A\mid\overline{B})$.

a) Como *A* y *B* son independientes, la probabilidad del suceso intersección $A\cap B$ es:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}15$$

De manera que los sucesos no son incompatibles, ya que si lo fueran $A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=0$.

b) Se trata del suceso $A\cap\overline{B}$, cuya probabilidad es:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)P\left(\overline{B}\right)=0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}35$$

c) La probabilidad de $\overline{A}$ condicionada a que ha ocurrido $\overline{B}$ es:

$$P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)=0{,}5$$

d) En este caso, de la definición de probabilidad condicionada:

$$P\left(A\mid\overline{B}\right)=P(A)=0{,}5$$

76. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio, con $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}6$ y $P\left(A\cap\overline{B}\right)=0{,}1$:

a) Halla $P(A\cap B)$.

b) Calcula $P(A\mid B)$ y $P(\overline{A}\mid\overline{B})$.

a) $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right)=0{,}3-0{,}1=0{,}2$

b) $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}6}=\dfrac{1}{3}$

$$P\left(\overline{A}\mid\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-0{,}7}{1-0{,}6}=\frac{0{,}3}{0{,}4}=\frac{3}{4}$$

Ya que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}3+0{,}6-0{,}2=0{,}7$

Probabilidad total. Teorema de Bayes

77. Considera dos urnas, la primera con 5 bolas blancas y 6 verdes y la segunda con 4 bolas blancas y 3 verdes. De la primera se extraen dos bolas al azar y se pasan a la segunda urna. Finalmente, de la segunda urna se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) La bola sea verde.

b) Las bolas que se han pasado de la primera urna a la segunda sean verdes, si la bola extraída de la segunda ha sido verde.

Sean $U_1 = (6V, 5B)$ y $U_2 = (3V, 4B)$ las dos urnas. De la urna U_1 se extaren dos bolas, que se introducen en U_2.

Las bolas extraídas de la primera urna pueden ser A = "las dos verdes", B = "una blanca y una verde" y C = "las dos blancas".

La probabilidad de cada uno de estos sucesos se obtiene mediante la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{3}{11} \quad P(B) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11} \quad P(C) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{2}{11}$$

En consecuencia, la segunda urna tiene tres posibles composiciones dependiendo del suceso A, B o C que haya ocurrido.

Si ocurre A, la composición de la segunda urna es $U_{2A} = (5V, 4B)$.

Si ocurre B, la composición de la segunda urna es $U_{2B} = (4V, 5B)$.

Si ocurre C, la composición de la segunda urna es $U_{2C} = (3V, 6B)$.

a) De la segunda urna se extrae una bola, la probabilidad del suceso D = "la bola extraída es verde", se calcula mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C) = \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{11} + \frac{4}{9}\cdot\frac{6}{11} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{11} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

b) Utilizando el teorema de Bayes:

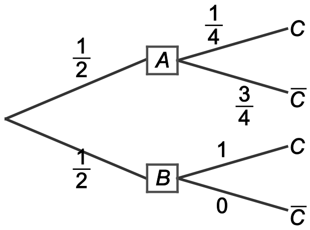
$$P(A \mid D) = \frac{P(D \mid A)P(A)}{P(D)} = \frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{1}{3}$$

78. Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda sea la de dos caras?

Sean los sucesos A = "la moneda elegida tiene cara y cruz", B = "la moneda elegida tiene dos caras" y C = "se obtienen dos caras en los dos lanzamientos"

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \qquad P(C \mid A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad P(C \mid B) = 1$$

La situación se puede representar mediante un diagrama de árbol.



Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(C \mid A)P(A) + P(C \mid B)P(B) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Y, por medio del teorema de Bayes:

$$P(B \mid C) = \frac{P(C \mid B)P(B)}{P(C)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}$$

Síntesis

79. Sabiendo que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \mid B) = 0{,}2$.

a) Calcula $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ y $P(B \mid A)$.

b) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

Con las probabilidades proporcionadas se pueden obtener algunas más que serán útiles para los cálculos posteriores:

$$P(A \mid B) = 0{,}2 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}2 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}62$$

a) En este caso:

$$P\left(\overline{A} \cup B\right) = P\left(\overline{A}\right) + P(B) - P\left(\overline{A} \cap B\right) = 1 - P(A) + P(B) - \left(P(B) - P(A \cap B)\right) = 1 - 0{,}3 + 0{,}4 - (0{,}4 - 0{,}08) = 0{,}78$$

Para la probabilidad condicionada:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}08}{0{,}3} = 0{,}26667$$

b) Los sucesos A y B no son independientes, puesto que:

$$P(A \mid B) = 0{,}2 \neq P(A) = 0{,}3$$

80. Sean A, B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales $P(A)=0{,}6$. Calcula $P(A\cap\overline{B})$ en cada caso:

a) A y B son mutuamente excluyentes.

b) A está contenido en B.

c) B contenido en A y $P(B)=0{,}3$.

d) $P(A\cap B)=0{,}1$.

a) Si A y B son mutuamente excluyentes $A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B)=0$ y entonces:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)=0{,}6$$

b) Si $A\subset B \Rightarrow A\cap B=A \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)$ entonces:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)=0$$

c) Si $B\subset A \Rightarrow A\cap B=B \Rightarrow P(A\cap B)=P(B)$ entonces:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(B)=0{,}6-0{,}3=0{,}3$$

d) En este caso:

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=0{,}6-0{,}1=0{,}5$$

81. Se sabe que $P(B\mid A)=0{,}9$, $P(A\mid B)=0{,}2$ y $P(A)=0{,}1$.

a) Calcula $P(A\cap B)$ y $P(B)$.

b) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

c) Calcula $P(A\cup\overline{B})$.

a) De la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A\cap B)=P(B\mid A)P(A)=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09$$

Y, por otro lado:

$$P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\mid B)}=\frac{0{,}09}{0{,}2}=0{,}45$$

b) Los sucesos A y B no son independientes puesto que:

$$P(A\mid B)=0{,}2\neq P(A)=0{,}1$$

c) La probabilidad pedida es:

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P(A\cap\overline{B})=P(A)+1-P(B)-\left(P(A)-P(A\cap B)\right)=0{,}1+1-0{,}45-\left(0{,}1-0{,}09\right)=0{,}64$$

CUESTIONES

82. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,2$ y $P(B)=0,4$.

a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determina $P(A\cap B)$. ¿Son además A y B independientes? Razónalo.

b) Si A y B son independientes, calcula $P(A\cap B)$. ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razona tu respuesta.

c) Si $P(A\mid B)=0$, calcula $P(A\cap B)$.¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónalo.

d) Si $A\subseteq B$, calcula $P(A\cap B)$. ¿Son A y B independientes? Razona la respuesta.

a) Si A y B son mutuamente excluyentes, $A\cap B=\varnothing$, y por tanto $P(A\cap B)=0$.

Los sucesos A y B no son independientes. Para que lo fueran debería verificarse que:

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Y en este caso no se cumple, ya que $P(A\cap B)=0\neq P(A)P(B)=0{,}08$.

b) Si A y B son independientes, entonces:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0{,}2\cdot 0{,}4=0{,}08$$

No son mutuamente excluyentes ya que $P(A\cap B)=0{,}08\neq 0$.

c) En este caso:

$$P(A\mid B)=0\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0\Rightarrow P(A\cap B)=0$$

Por lo que A y B son mutuamente excluyentes y, como se razonó en el apartado a no son independientes. Además, es fácil comprobar que $P(A\mid B)=0\neq P(A)=0{,}2$. Luego, A y B no son independientes.

d) Si $A\subset B$, entonces $A\cap B=A$ y, en consecuencia:

$$P(A\cap B)=P(A)=0{,}2\neq P(A)P(B)=0{,}08$$

Luego los sucesos A y B no son independientes. Además, puede comprobarse que $\mathrm{P}(B\mid A)=1$.

83. Comprueba que si A y B son dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio, se verifica que:

a) $P\left(A\cup\overline{B}\right)=1-P\left(\overline{A}\right)P(B)$

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)P\left(\overline{A}\right)$

a) Si A y B son independientes, también lo son A y $\overline{B}$. Teniendo esto en cuenta y las propiedades de la probabilidad:

$$P\left(A\cup\overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P(A)P\left(\overline{B}\right)=P(A)+1-P(B)-P(A)\left(1-P(B)\right)=$$
$$=1-P(B)+P(A)P(B)=1-P(B)\left(1-P(A)\right)=1-P(B)P\left(\overline{A}\right)$$

b) En este caso, aplicando propiedades de la probabilidad:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=P(A)+P(B)\left(1-P(A)\right)=P(A)+P(B)P\left(\overline{A}\right)$$

84. Sean *A* y *B* dos sucesos incompatibles, con $P(A \cup B) > 0$, demostrar que:

$$\boldsymbol{P(B \mid A \cup B) = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)}}$$

Si *A* y *B* son incompatibles $A \cap B = \varnothing$ y $P(A \cap B) = 0$, con lo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Por la definición de probabilidad condicionada y como $B \cap (A \cup B) = B$, se tiene que:

$$P(B \mid A \cup B) = \frac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)}$$

85. Si *A*, *B* y *C* son tres sucesos asociados a un experimento aleatorio de modo que $B \cap C \subset A$ prueba que:

$$\boldsymbol{P(\overline{A}) \le P(\overline{B}) + P(\overline{C})}$$

$$B \cap C \subset A \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B \cap C} \Rightarrow P(\overline{A}) \le P(\overline{B \cap C})$$

Utilizando una de las leyes de De Morgan y las propiedades de la probabilidad:

$$P(\overline{A}) \le P(\overline{B \cap C}) = P(\overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{B}) + P(\overline{C}) - P(\overline{B} \cap \overline{C}) \le P(\overline{B}) + P(\overline{C})$$

Puesto que $P(\overline{B} \cap \overline{C}) \ge 0$

86. Si *A* y *B* son dos sucesos cualesquiera asociados a un experimento aleatorio, prueba que:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) \ge 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})}$$

Es suficiente con tener en cuenta que $P(A \cap B) \le 1$ y que entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ge P(A) + P(B) - 1 = 1 - P(\overline{A}) + 1 - P(\overline{B}) - 1 = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})$$

87. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Prueba que:

a) Si *A* y *B* son independientes con $0 < P(A) < 1$, entonces $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$.

b) Y recíprocamente: si $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$, entonces *A* y *B* son independientes.

a) Si *A* y *B* son independientes, por definición $P(B \mid A) = P(B)$ y además:

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A)P(B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B)(1 - P(A))}{1 - P(A)} = P(B)$$

La última igualdad es posible porque $0 < P(A) < 1 \Rightarrow 1 - P(A) \ne 0$.

b) Recíprocamente:

$$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A}) \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

De donde se obtiene:

$$P(B \cap A)(1 - P(A)) = (P(B) - P(B \cap A))P(A)$$

Desarrollando y simplificando se llega a que:

$$P(B \cap A) = P(B)P(A)$$

Y, por tanto, los sucesos *A* y *B* son independientes.

PROBLEMAS

88. El 75 % de los alumnos de un instituto practican algún deporte, el 30 % tocan un instrumento musical y el 15 % realiza ambas actividades. Elegido un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Realice al menos una de las dos actividades.

b) No realice ninguna de las dos actividades.

c) Solo realice una de las dos actividades.

Elegido un alumno al azar, se consideran los sucesos D = “practica algún deporte”, M = “toca un instrumento musical”. Se tiene que:

$$P(D)=0{,}75 \quad , P(M)=0{,}3 \quad , P(D\cap M)=0{,}15$$

a) Se debe calcular la probabilidad del suceso unión $D\cup M$

$$P(D\cup M)=P(D)+P(M)-P(D\cap M)=0{,}75+0{,}3-0{,}15=0{,}9$$

b) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{D}\cap\overline{M}$, cuya probabilidad se puede expresar:

$$P\left(\overline{D}\cap\overline{M}\right)=P\left(\overline{D\cup M}\right)=1-P(D\cup M)=1-0{,}9=0{,}1$$

c) En este caso se tiene que calcular la probabilidad del suceso $\left(D\cap\overline{M}\right)\cup\left(\overline{D}\cap M\right)$, unión de dos sucesos mutuamente excluyentes:

$$P\left(D\cap\overline{M}\right)=P(D)-P(D\cap M)=0{,}75-0{,}15=0{,}6$$

$$P\left(\overline{D}\cap M\right)=P(M)-P(D\cap M)=0{,}3-0{,}15=0{,}15$$

Y, finalmente:

$$P\left(\left(D\cap\overline{M}\right)\cup\left(\overline{D}\cap M\right)\right)=P\left(D\cap\overline{M}\right)+P\left(\overline{D}\cap M\right)=0{,}6+0{,}15=0{,}75$$

89. Antonio va a la compra dos días de cada cinco. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va a la compra y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

b) Calcula la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruta esté de oferta.

Se consideran los sucesos A = “Antonio va a la compra” y su contrario $\overline{A}$, con $P(A)=\frac{2}{5}$ y $P\left(\overline{A}\right)=\frac{3}{5}$.

Además, sea F = “la fruta está de oferta”. Se sabe que $P(F \mid A)=\frac{1}{3}$ y $P\left(F \mid \overline{A}\right)=\frac{1}{2}$

a) La probabilidad del suceso F se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(F)=P(F \mid A)P(A)+P\left(F \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{30}$$

b) Se pide la probabilidad del suceso $A\cup F$, que se calcula:

$$P(A\cup F)=P(A)+P(F)-P(A\cap F)=P(A)+P(F)-P(F \mid A)P(A)=\frac{2}{5}+\frac{13}{30}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$$

90. El 25 % de los estudiantes de una Universidad lee las noticias en prensa escrita en papel, el 70 %, en prensa digital, y el 10 %, en ambos formatos. Elegido, al azar, un estudiante de esa Universidad:

a) Calcula la probabilidad de que lea las noticias en formato papel o digital.

b) Sabiendo que lee las noticias en prensa digital, calcula la probabilidad de que también las lea en prensa escrita en papel.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que lea las noticias solo en uno de los dos formatos?

Sean los sucesos A = "el estudiante lee las noticias en prensa escrita en papel", B = "el estudiante lee las noticias en prensa digital".

$$P(A) = 0{,}25 \quad , \quad P(B) = 0{,}7 \quad , \quad P(A \cap B) = 0{,}1$$

a) Se trata del suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}85$$

b) Se debe calcular la probabilidad condicionada $P(A \mid B)$:

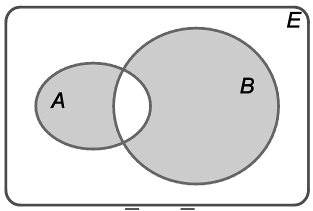
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}7} = \frac{1}{7}$$

c) El suceso en cuestión está formado por la unión de dos sucesos mutuamente excluyentes, como se ve en el diagrama de Venn:

$$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Y su probabilidad es:

$$P\left((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$
$$= 0{,}25 + 0{,}7 - 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}75$$



$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

91. En una estantería hay 4 libros de matemáticas, 6 de física y 2 de química. Si se cogen 2 libros al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de la misma materia?

Sean M = "Los dos libros son de matemáticas", F = "Los dos libros son de física" y Q = "Los dos libros son de química"

$$P(M) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11} \, , \quad P(F) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{22} \text{ y } \; P(Q) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$$

$$P(M \cup F \cup Q) = \frac{1}{11} + \frac{5}{22} + \frac{1}{66} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3}$$

92. En un polígono industrial se almacenan 30 000 latas de refresco procedentes de fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en el año actual caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 latas, de la fábrica B, y 3000, de la fábrica C. Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y se ha visto que caduca en el año actual, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fábrica A?

Aplicando la regla de Laplace se obtiene directamente la probabilidad pedida:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1800}{1800 + 2400 + 3000} = \frac{1800}{7200} = \frac{1}{4}$$

93. En una autoescuela especializada, se ha impartido un curso de mejora de la conducción a 50 conductores que han perdido todos los puntos del permiso de conducir. De los asistentes al curso, 30 son jóvenes menores de 35 años. Después de un tiempo, se constata que un 70 % de los jóvenes ha mejorado su conducción. Este porcentaje asciende al 80 % en el resto de los asistentes. Si aleatoriamente se elige una persona que asistió al curso, calcula la probabilidad de que:

a) Haya mejorado su conducción.

b) Tenga menos de 35 años, sabiendo que ha mejorado su conducción.

Se consideran los sucesos A = "la persona elegida es joven menor de 35 años", $\overline{A}$ = "la persona elegida tiene 35 o más años" y M = "la persona elegida ha mejorado su conducción"

Se sabe que:

$$P(A)=\frac{3}{5}=0{,}6 \ , \ P\left(\overline{A}\right)=\frac{2}{5}=0{,}4 \ , \ P(M \mid A)=0{,}7 \ , \ P\left(M \mid \overline{A}\right)=0{,}8$$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(M)=P(M \mid A)P(A)+P\left(M \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)=0{,}7\cdot 0{,}6+0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}74$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$P(A \mid M)=\frac{P(M \mid A)P(A)}{P(M)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}6}{0{,}74}=0{,}56757$$

94. En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0,4, de molinos eólicos, con probabilidad 0,26, y de ambos tipos de instalaciones, con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

a) Por alguna de las dos instalaciones.

b) Solamente por una de ellas.

Se consideran los sucesos S = "la energía proviene de placas solares", M = "la energía proviene de molinos de eólicos"

Se tiene que:

$$P(S)=0{,}4 \ , \ P(M)=0{,}26 \ , \ P(S\cap M)=0{,}12$$

a) Se pide la probabilidad del suceso unión $S\cup M$,

$$P(S\cup M)=P(S)+P(M)-P(S\cap M)=0{,}4+0{,}26-0{,}12=0{,}54$$

b) B = "la energía proviene solo de placas solares o solo de molinos eólicos". Suceso que se puede escribir como unión de sucesos mutuamente excluyentes:

$$B=\left(S\cap\overline{M}\right)\cup\left(\overline{S}\cap M\right)$$

De modo que:

$$P(B)=P\left(S\cap\overline{M}\right)+P\left(\overline{S}\cap M\right)=P(S)+P(M)-2P(S\cap M)=0{,}4+0{,}26-2\cdot 0{,}12=0{,}42$$

95. A la consulta de un médico acude una mujer que sospecha que está embarazada de solo unos pocos días. Después de un primer examen, el médico cree que la mujer está embarazada con probabilidad 0,7. Para confirmar su diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 3 % de los casos en que la mujer está realmente embarazada. Por otro lado, el test da positivo en el 5 % de los casos en los que la mujer no está embarazada. Calcula la probabilidad de que:

a) El test dé positivo.

b) La mujer esté realmente embarazada sabiendo que el test ha dado positivo.

Sean los sucesos A = "la mujer está embarazada" y su contrario $\overline{A}$ = "la mujer no está embarazada".

Las probabilidades iniciales para estos sucesos son $P(A) = 0{,}7$, $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}3$.

Se considera el suceso T = "el test da positivo" y su contrario $\overline{T}$ = "el test da negativo".

Se sabe que:

$$P\left(\overline{T} \mid A\right) = 0{,}03 \ , \ P\left(T \mid \overline{A}\right) = 0{,}05$$

A partir de esta información, también se conoce que $P(T \mid A) = 0{,}97$ y $P\left(\overline{T} \mid \overline{A}\right) = 0{,}95$.

a) La probabilidad de que el test dé positivo, se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(T) = P(T \mid A)P(A) + P\left(T \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) = 0{,}97 \cdot 0{,}7 + 0{,}05 \cdot 0{,}3 = 0{,}694$$

b) Utilizando el teorema de Bayes:

$$P(A \mid T) = \frac{P(T \mid A)P(A)}{P(T)} = \frac{0{,}97 \cdot 0{,}7}{0{,}694} = 0{,}9784$$

96. En la representación de navidad de los alumnos de 3.º de Primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales, 3, de personas, y 12, de árboles. Los papeles se asignan al azar. Los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les corresponde. Calcula la probabilidad de que:

a) A los tres primeros alumnos no les toque el papel de árbol.

b) A los dos primeros alumnos les toque el mismo papel.

c) El primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.

d) A los tres primeros alumnos de las lista les toque a cada uno un papel diferente.

Los alumnos cogen el papel por orden alfabético. Nombramos por *A*, el papel de animal, por *S* el de persona y por *R* el de árbol. Así, por ejemplo, el suceso *SRA* indica que al primer alumno le tocó el papel de persona, al segundo alumno el de árbol y al tercer alumno el de animal.

a) En este caso se pide la probabilidad del suceso $\overline{RRR}$ = "a los tres primeros alumnos no les toque papel de árbol".

$$P\left(\overline{RRR}\right)=\frac{10}{22}\cdot\frac{9}{21}\cdot\frac{8}{20}=\frac{720}{9240}=\frac{6}{77}$$

b) A los dos primeros alumnos les tocan 2 animales (*AA*) o bien 2 personas (*SS*) o bien 2 árboles (*RR*)

$$P(AA)=\frac{7}{22}\cdot\frac{6}{21}=\frac{42}{462}\quad,\ P(SS)=\frac{3}{22}\cdot\frac{2}{21}=\frac{6}{462}\quad,\ P(RR)=\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21}=\frac{132}{462}$$

Como los sucesos son mutuamente excluyentes:

$$P(AA\cup SS\cup RR)=\frac{42}{462}+\frac{6}{462}+\frac{132}{462}=\frac{180}{462}=\frac{30}{77}$$

c) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $\overline{SS}S$ = "a los dos primeros alumnos no les toca el papel de persona y al tercero sí le toca". Entonces, debe ser:

$$P\left(\overline{SS}S\right)=\frac{19}{22}\cdot\frac{18}{21}\cdot\frac{3}{20}=\frac{1026}{9240}=\frac{171}{1540}$$

d) En este caso, cada uno de los tres primeros alumnos tiene que tener un papel diferente. Por ejemplo *ASR* = "al primero de la lista, animal; al segundo, persona y al tercero árbol".

En total hay $P_3=3!=6$ posibilidades, que son las ordenaciones de los tres papeles en los tres primeros puestos de la lista.

La probabilidad de cada una de estas posibilidades es la misma. Por ejemplo, para *ASR*:

$$P(ASR)=\frac{7}{22}\cdot\frac{3}{21}\cdot\frac{12}{20}=\frac{252}{9240}=\frac{3}{110}$$

Y multiplicando por 6 se obtiene la probabilidad del suceso *D* = "A los tres primeros de la lista les toque a cada uno un papel diferente".

$$P(D)=6\cdot\frac{3}{110}=\frac{18}{110}=\frac{9}{55}$$

97. En una caja hay *x* bolas blancas y 1 roja. Al extraer de la caja 2 bolas al azar sin reemplazamiento, la probabilidad de que sean blancas es 0,5. Calcula el número de bolas blancas que debe tener la caja.

Cuando sacamos la primera bola quedan en el saco *x* bolas, y cuando sacamos la segunda quedan *x* - 1, por lo que la probabilidad de sacar la primera bola blanca es $P(B1)=\frac{x}{x+1}$ y de sacar una segunda bola blanca es $P(B2)=\frac{x-1}{x}$.

La probabilidad total del suceso *B* será:

$$P(B)=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x}=0{,}5\Rightarrow x=3\text{ bolas blancas}$$

98. Al servicio de urgencias de un hospital llegan pacientes de tres procedencias distintas: remitidos por centros de salud (47 %), por iniciativa propia (32 %) y afectados por accidentes y trasladados directamente por ambulancias (21 %). Los pacientes que presentan dolencias graves son el 10 %, el 4 % y el 25 %, respectivamente. Si se elige aleatoriamente un paciente que llega a dicho servicio:

a) Hallar la probabilidad de que no tenga dolencia grave.

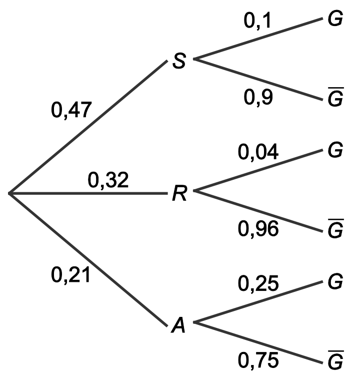
b) Si se detecta una dolencia grave, determinar la probabilidad de que haya acudido por iniciativa propia.

Sean los sucesos S = "el paciente llega a urgencias remitido por el centro de salud", R = "por iniciativa propia" y A = "afectado por accidente" forman un sistema completo de sucesos.

Considera el suceso G = "el paciente presenta dolencia grave". Se tiene que:

$$P(S)=0{,}47\ ,\ P(R)=0{,}32\ ,\ P(A)=0{,}21\ ,\ P(G\mid S)=0{,}1\ ,\ P(G\mid R)=0{,}04\ ,\ P(G\mid A)=0{,}25$$

La situación se puede representar en un diagrama de árbol:



a) Se calcula la probabilidad del suceso G mediante el teorema de la probabilidad total, y luego se obtiene la probabilidad del suceso contrario de G:

$$P(G)=P(G\mid S)P(S)+P(G\mid R)P(R)+P(G\mid A)P(A)=$$
$$=0{,}1\cdot 0{,}47+0{,}04\cdot 0{,}32+0{,}25\cdot 0{,}21=0{,}1123$$

Entonces $P\left(\overline{G}\right)=1-P(G)=1-0{,}1123=0{,}8877$

b) En este caso, utilizando el teorema de Bayes, se tiene:

$$P(R\mid G)=\frac{P(G\mid R)P(R)}{P(G)}=\frac{0{,}04\cdot 0{,}32}{0{,}1123}=0{,}1140$$

99. En una ciudad, el 35 % de los ciudadanos utiliza el metro al menos una vez al día, el 24 % usa el autobús, y un 15 %, ambos medios de transporte. Se elige una persona al azar, halla la probabilidad de que:

a) Utilice alguno de los dos transportes.

b) No utilice ningún transporte.

c) Sabiendo que monta en metro, no utilice el autobús.

Sean los sucesos A = "la persona elegida usa el autobús", M = "la persona elegida usa el metro".

Se tiene que:

$$P(A)=0{,}24\ ,\ P(M)=0{,}35\ ,\ P(A\cap M)=0{,}15$$

a) Se pide la probabilidad del suceso $A\cup M$:

$$P(A\cup M)=P(A)+P(M)-P(A\cap M)=0{,}35+0{,}24-0{,}15=0{,}44$$

b) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{M}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{M}\right)=P\left(\overline{A\cup M}\right)=1-P(A\cup M)=1-0{,}44=0{,}56$$

c) Ahora debe calcularse la probabilidad $P\left(\overline{A}\mid M\right)$.

$$P\left(\overline{A}\mid M\right)=\frac{P(\overline{A}\cap M)}{P(M)}=\frac{P(M)-P(A\cap M)}{P(M)}=\frac{0{,}35-0{,}15}{0{,}35}=\frac{0{,}2}{0{,}35}=\frac{4}{7}$$

100. El 38 % de los habitantes de una ciudad declaran que su deporte preferido es el fútbol, el 21 % prefiere el baloncesto y el resto se inclina por otro deporte. Si se eligen al azar tres personas, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Las tres personas sean aficionadas al fútbol.

b) Dos personas prefieran el fútbol y la otra el baloncesto.

c) Al menos una de las tres personas prefiera otro deporte diferente al fútbol y al baloncesto.

a) Sea el sucesos A = "Las tres personas son aficionadas al fútbol".

$$P(A) = 0{,}38^3 = 0{,}0549$$

b) Sea B = "dos de las personas prefieren el fútbol y la otra el baloncesto".

El número de formas posibles en que se pueden elegir las dos personas, entre las tres, que prefieren el fútbol (o la que prefiere el baloncesto) es:

$$\binom{3}{2} = 3$$

Y, por cada una de estas posibilidades, la probabilidad de que dos prefieran fútbol, y la otra, baloncesto es $0{,}38^2 \cdot 0{,}21$, con lo que $P(B) = 3 \cdot 0{,}38^2 \cdot 0{,}21 = 0{,}09097$.

c) Sea el suceso C = "al menos una de las tres personas prefiere otro deporte que no sea el fútbol o el baloncesto".

El suceso contrario de C, es $\overline{C}$ = "las tres prefieren el fútbol o el baloncesto", cuya probabilidad es:

$$P(\overline{C}) = (0{,}38 + 0{,}21)^3 = 0{,}2054$$

Y, por tanto, $P(C) = 1 - 0{,}2054 = 0{,}7946$

101. En un servicio técnico especializado en cámaras fotográficas, el 70 % de las cámaras que se reciben son del modelo A, y el resto, del modelo B. El 95 % de las cámaras del modelo A son reparadas, mientras que del modelo B solo se reparan el 80 %. Si se elige una cámara al azar:

a) Halla la probabilidad de que no se haya podido reparar.

b) Si se observa que no ha sido reparada, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

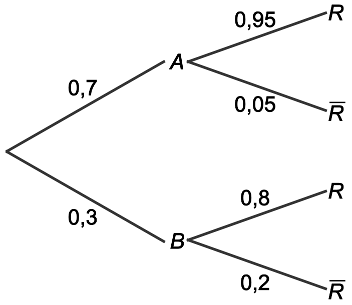
Se consideran los sucesos A = "la cámara es del modelo A" y B = "la cámara es del modelo B", que constituyen un sistema completo de sucesos.

Sea, además, el suceso R = "la cámara es reparada".

Las probabilidades que se conocen son:

$P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}3$, $P(R \mid A) = 0{,}95$, $P(R \mid B) = 0{,}8$

La situación se puede representar en el siguiente diagrama de árbol.



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad de que la cámara se haya podido reparar:

$$P(R) = P(R \mid A)P(A) + P(R \mid B)P(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}905$$

Luego, la probabilidad de que no haya podido ser reparada es:

$$P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}905 = 0{,}095$$

b) Utilizando ahora el teorema de Bayes:

$$P(B \mid \overline{R}) = \frac{P(\overline{R} \mid B)P(B)}{P(\overline{R})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}095} = 0{,}63158$$

102. Se va a proceder a la selección de investigadores para un centro aeroespacial. Se realizan 3 pruebas independientes: A (idiomas), B (conocimientos teóricos y prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas. Por procesos anteriores se sabe que la prueba A la superan el 10 % de los aspirantes, la prueba B, el 40 %, y la C, el 20 %. Se elige un candidato al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea seleccionado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea seleccionado por fallar solo en una prueba?

c) Sabiendo que ha pasado dos pruebas ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B?

Sean los sucesos A = "el candidato supera la prueba de idiomas", B = "el candidato supera la prueba de conocimientos teóricos y prácticos" y C = "el candidato supera las pruebas físicas".

$$P(A) = 0{,}1 \;,\; P(B) = 0{,}4 \;,\; P(C) = 0{,}2$$

a) Para ser seleccionado, es preciso pasar las tres pruebas, suceso $A \cap B \cap C$. Como los sucesos son mutuamente independientes:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$

b) Contando con el suceso contrario de cada uno de los tres dados, el suceso por el que se pregunta es la unión de tres sucesos mutuamente excluyentes.

$\overline{A} \cap B \cap C$ = "no supera la prueba de idiomas pero sí las otras dos".

$A \cap \overline{B} \cap C$ = "no supera la prueba de conocimientos teóricos y prácticos pero sí las otras dos".

$A \cap B \cap \overline{C}$ = "no supera las pruebas físicas pero sí las otras dos".

$$D = \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)$$

Cuya probabilidad es:

$$P(D) = P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) = P\left(\overline{A}\right)P(B)P(C) + P(A)P\left(\overline{B}\right)P(C) + P(A)P(B)P\left(\overline{C}\right) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}116$$

c) El suceso "el candidato ha pasado dos pruebas" es el suceso D del apartado b. De esta manera, se pide la probabilidad del suceso $\overline{B}$, dado que ha ocurrido el suceso D. Es decir:

$$P\left(\overline{B} \mid D\right) = \frac{P(\overline{B} \cap D)}{P(D)} = \frac{P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right)}{P(D)} = \frac{P(A)P\left(\overline{B}\right)P(C)}{P(D)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2}{0{,}116} = 0{,}1034$$

103. En una población, la mitad de los ciudadanos manifiesta estar satisfecho con su calidad de vida y el 70 % tiene una vivienda propia. De los que no están satisfechos con su calidad de vida, el 45 % no tiene vivienda propia. En esta ciudad, calcula el porcentaje de ciudadanos que:

a) Tiene vivienda propia y no está satisfecho con su calidad de vida.

b) Está satisfecho con su calidad de vida si tiene vivienda propia.

c) Está satisfecho con su calidad de vida si no tiene vivienda propia.

Se selecciona un individuo al azar y se consideran los sucesos *S* = "está satisfecho con su calidad de vida", *V* = "tiene vivienda propia" y sus respectivos sucesos contrarios.

Se tiene que:

$$P(S)=0{,}5\ ,\ P\left(\overline{S}\right)=0{,}5\ ,\ P(V)=0{,}7\ ,\ P\left(\overline{V}\right)=0{,}3\ ,\ P\left(\overline{V}\mid\overline{S}\right)=0{,}45\ ,\ P\left(V\mid\overline{S}\right)=0{,}55$$

De las probabilidades anteriores se pueden obtener las probabilidades de los sucesos unión e intersección de *S* y *V*. En efecto:

$$P\left(\overline{V}\mid\overline{S}\right)=0{,}45\Rightarrow\frac{P\left(\overline{V}\cap\overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)}=0{,}45\Rightarrow P\left(\overline{V\cup S}\right)=0{,}45\cdot 0{,}5=0{,}225\Rightarrow P(V\cup S)=0{,}775$$

Y, entonces:

$$P(V\cap S)=P(V)+P(S)-P(V\cup S)=0{,}7+0{,}5-0{,}775=0{,}425$$

a) Debe calcularse la probabilidad del suceso $V\cap\overline{S}$:

$$P\left(V\cap\overline{S}\right)=P\left(V\mid\overline{S}\right)P\left(\overline{S}\right)=0{,}55\cdot 0{,}5=0{,}275$$

De modo que el 27,5 % de los ciudadanos tiene vivienda propia y no está satisfecha con su calidad de vida.

b) Se trata de la probabilidad del suceso *S* condicionado por el suceso *V*:

$$P(S\mid V)=\frac{P(V\cap S)}{P(V)}=\frac{0{,}425}{0{,}7}=0{,}6071$$

El 60,71 % de la población que tiene vivienda propia está satisfecho con su calidad de vida.

c) Ahora, debe calcularse la probabidad del suceso *S* condicionado por $\overline{V}$:

$$P\left(S\mid\overline{V}\right)=\frac{P(S\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}=\frac{P(S)-P(S\cap V)}{P(\overline{V})}=\frac{0{,}5-0{,}425}{0{,}3}=0{,}2500$$

El 25 % de la población que no tiene vivienda propia está satisfecha con su calidad de vida.

104. Un hotel dispone de 60 habitaciones de tres tipos: 6 individuales, 50 dobles y 4 suites. De las 6 individuales, 3 tienen baño completo, y otras 3, solo ducha. De las dobles el 80 % tiene baño completo, el resto, solo ducha. Todas las suites tienen baño completo. Si elegimos una habitación al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Tenga solo ducha.

b) Sea doble, si la habitación tiene baño completo.

c) Sea individual y tenga ducha.

Los sucesos A = "la habitación es individual", B = "la habitación es doble" y C = "la habitación es una suite" constituyen un sistema completo de sucesos.

El hotel dispone de 60 habitaciones. Si la habitación se elige al azar, la probabilidad de que sea de cada uno de los tres tipos es:

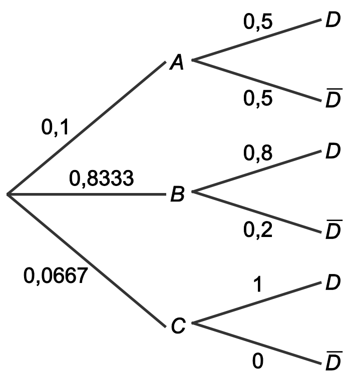
$$P(A)=\frac{6}{60}=0{,}1,\ P(B)=\frac{50}{60}=0{,}8333,\ P(C)=\frac{4}{60}=0{,}0667$$

Sea el suceso D = "la habitación tiene baño completo". Se sabe que:

$$P(D\mid A)=\frac{3}{6}=0{,}5\ ,\ P(D\mid B)=0{,}8\ ,\ P(D\mid C)=1$$

Y de estos, se tiene que: $P\left(\overline{D}\mid A\right)=0{,}5$, $P\left(\overline{D}\mid B\right)=0{,}2$, $P\left(\overline{D}\mid C\right)=0$

La situación se muestra en el diagrama de árbol adjunto.



a) El suceso "tenga solo ducha" puede ser considerado como el contrario del suceso D. Utilizando la información dada y el teorema de la probabilidad total para el suceso contrario del D:

$$P\left(\overline{D}\right)=P\left(\overline{D}\mid A\right)P(A)+P\left(\overline{D}\mid B\right)P(B)+P\left(\overline{D}\mid C\right)P(C)=$$
$$=0{,}5\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}8333+0\cdot 0{,}0667=0{,}2167$$

b) En este caso se trata de la probabilidad del suceso B condicionada por el suceso D. Utilizando la regla de Bayes y que $P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-0{,}2167=0{,}7833$:

$$P(B\mid D)=\frac{P(D\mid B)P(B)}{P(D)}=\frac{0{,}8\cdot 0{,}8333}{0{,}7833}=0{,}8511\cong 0{,}85$$

c) Debe calcularse la probabilidad del suceso $A\cap\overline{D}$, que se obtiene:

$$P\left(A\cap\overline{D}\right)=P\left(\overline{D}\mid A\right)P(A)=0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}05$$

105. Un paciente acude a su médico al encontrarse enfermo desde hace varios días. Tras un cuidadoso análisis preliminar, el médico duda al 50 % de si el paciente tendrá o no tuberculosis, por lo que le prescribe una prueba específica.

La prueba consiste en un análisis de sangre que da positivo si el paciente tiene la enfermedad en el 99 % de los casos y da negativo si el paciente no tiene la enfermedad en el 98 % de los casos. Calcula la probabilidad de que nuestro paciente:

a) De positivo en el test.

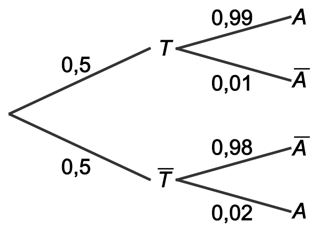
b) Esté realmente enfermo de tuberculosis, si el test da resultado negativo.

Sea el suceso T = "el paciente tiene tuberculosis". Según el diagnóstico inicial del médico $P(T)=0{,}5$, $P(\overline{T})=0{,}5$.

Considera el suceso A = "la prueba da positivo en tuberculosis".

$P(A \mid T)=0{,}99$, $P(\overline{A} \mid \overline{T})=0{,}98$

Y, por tanto, $P(\overline{A} \mid T)=0{,}01$, $P(A \mid \overline{T})=0{,}02$



En el digrama de árbol se representa la situación.

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(A)=P(A \mid T)P(T)+P(A \mid \overline{T})P(\overline{T})=0{,}99\cdot 0{,}5+0{,}02\cdot 0{,}5=0{,}505$$

b) Se trata de calcular la probabilidad del suceso T condiconada por el suceso $\overline{A}$. Por el teorema de Bayes:

$$P(T \mid \overline{A})=\frac{P(\overline{A} \mid T)P(T)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}01\cdot 0{,}5}{1-0{,}505}=0{,}0101$$

106. El 30 % de las pólizas de una compañía de seguros corresponden a seguros de vida, y el resto, a pólizas de seguros de hogar. Actualmente, en un 12 % de las pólizas de seguros de vida se producen retrasos en los pagos, mientras que ese porcentaje es del 8 % en el caso de los seguros de hogar. Si se elige al azar una póliza, calcula la probabilidad de que:

a) Esté al corriente de pago.

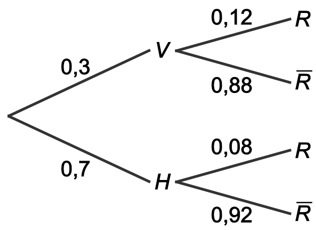
b) Corresponda a un seguro de hogar si se sabe que está al corriente de pago.

Los sucesos V = "la póliza es de seguro de vida" y H = "la póliza es de seguro de hogar" constituyen una partición del espacio muestral en este caso, con las probabilidades $P(V)=0{,}3$ y $P(H)=0{,}7$

Sea el suceso R = "se produce retraso en el págo de la póliza". Su contrario $\overline{R}$ = "la póliza está al corriente de pago". Por la información disponible, se tiene que:

$P(R \mid V)=0{,}12$, $P(R \mid H)=0{,}08$

Y, por tanto $P(\overline{R} \mid V)=0{,}88$ y $P(\overline{R} \mid H)=0{,}92$



En el diagrama de árbol se muestra la situación.

a) La probabilidad del suceso $\overline{R}$ se obtiene mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{R})=P(\overline{R} \mid V)P(V)+P(\overline{R} \mid H)P(H)=0{,}88\cdot 0{,}3+0{,}92\cdot 0{,}7=0{,}908$$

b) Utilizando la regla de Bayes:

$$P(H \mid \overline{R})=\frac{P(\overline{R} \mid H)P(H)}{P(\overline{R})}=\frac{0{,}92\cdot 0{,}7}{0{,}908}=0{,}7093$$

107. Una familia consume leche de dos marcas diferentes *A* y *B*. A partir de la primera compra, la probabilidad de que la familia cambie de marca es 0,7. Si la primera compra se realizó al azar lanzando una moneda al aire, calcula la probabilidad de que:

a) En tres compras consecutivas hayan comprado dos veces la marca *A*.

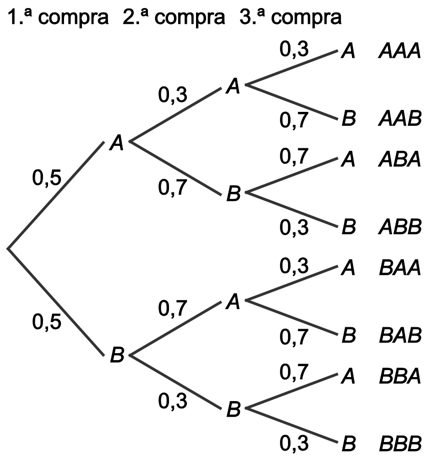
b) En la tercera compra hayan adquirido la marca *B*.

c) Empezaran comprando la marca *A* si en la tercera compra adquirieron la *B*.

Sea *A* = "la familia compra marca A" y *B* = "la familia compra marca B".

Por ejemplo, el suceso ABA representa que en la 1ª y 3ª compra se adquirió la marca A y en la 2ª la marca B.

En el siguiente diagrama de árbol se contemplan las ocho situciones posibles.



a) La probabilidad del suceso *C* = "se haya comprado 2 veces la marca A" es:

$$P(C) = P(AAB) + P(ABA) + P(BAA) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,455$$

b) La probabilidad del suceso *D* = "en la tercera compra hayan adquirido la marca B" es:

$$P(D) = P(AAB) + P(ABB) + P(BAB) + P(BBB) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,5$$

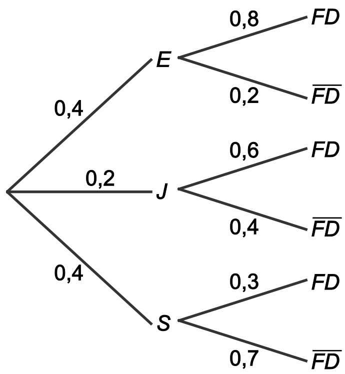
c) Sea *F* = "la primera compra fue de la marca A" $P(F) = 0,5$. Se pide la probabilidad del suceso *D*, sabiendo que ha ocurrido *F*.

$$P(F \mid D) = \frac{P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \mid F)P(F)}{P(D)} = \frac{(0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3) \cdot 0,5}{0,5} = 0,42$$

108. Al 80 % de los trabajadores en educación que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida, también al 60 % de los trabajadores de justicia y al 30 % de los de sanidad. En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad y el doble en educación que en justicia. Se sabe que a un trabajador elegido al azar entre estos tres sectores, no le hicieron fiesta. Calcula la probabilidad de que fuera de sanidad.

Sea *E* = "trabajadores de educación", *J* = "trabajadores de justicia", *S* = "trabajadores de sanidad" y *FD* = "trabajadores que recibieron una fiesta de despedida".

En el diagrama de árbol se muestra la situación:



Vamos a calcular la probabilidad de que un trabajador recibiese una fiesta. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(FD) = P(FD \mid E)P(E) + P(FD \mid J)P(J) + P(FD \mid S)P(S) =$$
$$= 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,56$$

Aplicando el teorema de Bayes se tiene que:

$$P(S \mid \overline{FD}) = \frac{P(\overline{FD} \mid S)P(S)}{P(\overline{FD})} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{1 - 0,56} = 0,64$$

109. El 40 % de los teléfonos móviles que llegan para ser reparados a un servicio técnico están en garantía. De estos, un 7 % ya ha sido reparado antes mientras que el 25 % de los que no están en garantía ya fueron reparados en otra ocasión. Si se elige un teléfono de este servicio técnico al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Ya haya sido reparado anteriormente.

b) El teléfono esté en garantía si es la primera vez que llega al servicio técnico.

c) El teléfono no esté en garantía si se ha llevado anteriormente a reparar.

Se considera el suceso G = "el teléfono móvil está en garantía" y su contrario $\overline{G}$ = "el teléfono móvil no está en garantía". Los sucesos G y su contrario constituyen un sistema completo de de sucesos.

Además, sea el suceso R ="el teléfono móvil ya ha sido reparado". Se tiene que:

$$P(G)=0{,}4\ ,\ P\left(\overline{G}\right)=0{,}6\ ,\ P(R\mid G)=0{,}07\ ,\ P\left(R\mid \overline{G}\right)=0{,}25$$

Y, también, $P\left(\overline{R}\mid G\right)=0{,}93$ y $P\left(\overline{R}\mid \overline{G}\right)=0{,}75$

a) Se pide la probabilidad del suceso R. Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(R)=P(R\mid G)P(G)+P\left(R\mid \overline{G}\right)P\left(\overline{G}\right)=0{,}07\cdot 0{,}4+0{,}25\cdot 0{,}6=0{,}178$$

b) Se pide la probabilidad de que el teléfono esté en garantía sabiendo que no ha sido reparado. Utilizando la regla de Bayes:

$$P\left(G\mid \overline{R}\right)=\frac{P\left(\overline{R}\mid G\right)P(G)}{P(\overline{R})}=\frac{0{,}93\cdot 0{,}4}{1-0{,}178}=0{,}45255$$

c) En este caso, mediante la aplicación de la regla de Bayes:

$$P\left(\overline{G}\mid R\right)=\frac{P\left(R\mid \overline{G}\right)P\left(\overline{G}\right)}{P(R)}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}6}{0{,}178}=0{,}84270$$

PARA PROFUNDIZAR

110. Se dispone de un dado tetraédrico trucado con cuatro caras con puntuaciones: 1, 2, 3, 4, de modo que $P(4)=4P(1)$, $P(3)=3P(1)$, $P(2)=2P(1)$ en donde $P(4)$ indica la probabilidad de obtener la puntuación 4 y así sucesivamente. Se dispone también de dos urnas con las siguientes composiciones: Urna U_1: 1 bola roja y 2 bolas verdes; urna U_2: 2 bolas rojas y 3 bolas verdes. Se lanza el dado. Si sale número par extraemos una bola de la urna U_1. Si sale impar extraemos una bola de la urna U_2. Se pide:

a) Determina las probabilidades de los sucesos elementales que se presentan al lanzar el dado de cuatro caras.

b) Se lanza el dado y a continuación extraemos una bola de la urna que corresponda. Halla la probabilidad de que sea de color verde.

a) Sea $p=P(1)$, entonces $P(4)=4p,\ P(3)=3p,\ P(2)=2p$. Las probabilidades deben sumar 1, por lo que:

$$p+2p+3p+4p=1\Rightarrow 10p=1\Rightarrow p=0{,}1$$

De esta forma:

$$P(4)=0{,}4\ \ ,\ P(3)=0{,}3\ ,\ P(2)=0{,}2\ ,\ P(1)=0{,}1$$

b) Según la asignación obtenida en el apartado a, las probabilidades de elegir cada una de las urnas es:

$$P(U_1)=P(2)+P(4)=0{,}6\ ,\ \ P(U_2)=P(1)+P(3)=0{,}4$$

Sea V = "la bola extraída es de color verde". Las probabilidades de obtener bola verde en cada urna son:

$$P(V\mid U_1)=\frac{2}{3}\ ,\ P(V\mid U_2)=\frac{3}{5}$$

Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(V)=P(V\mid U_1)P(U_1)+P(V\mid U_2)P(U_2)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}6+\frac{3}{5}\cdot 0{,}4=0{,}64$$

111. El color de una clase de ratones, negros o marrones, depende de un par de genes, cada uno de los cuales puede ser B o b. Si los dos miembros de la pareja de genes son iguales (BB o bb) se dice que el ratón es homocigótico, en otro caso (Bb o bB) se dice que es heterocigótico. El ratón es de color marrón solo si es homocigótico *bb*. La descendencia de una pareja de ratones tiene dos de tales genes, uno del padre y otro de la madre, y si el padre es heterocigótico, el gen heredado tiene la misma probabilidad de ser B o b. Si un ratón negro es el resultado de un apareamiento entre una pareja de heterocigóticos. Calcula la probabilidad de que el ratón sea:

a) Homocigótico.

b) Heterocigótico.

Se nombran los sucesos H_M = "el ratón es homocigótico" y H_T = "el ratón es heterocigótico". Según la pareja de genes que se forme, se tiene que $H_M = \{BB, bb\}$, $H_T = \{Bb, bB\}$.

Por otro lado, se consideran los sucesos N = "el ratón es de color negro" y M = "el ratón es de color marrón". Se tiene que $N = \{BB, bB, Bb\}$, $M = \{bb\}$.

Se cruzan una pareja de ratones heterocigóticos, de forma que el conjuto de resultados posibles es:

$$E = \{BB, Bb, bB, bb\}$$

Siendo los posibles resultados equiprobables.

De esta forma, las probabilidades iniciales de que el ratón (descendenciente) sea negro (N) y marrón (M) son: $P(N) = \frac{3}{4}$, $P(M) = \frac{1}{4}$

a) En este caso, se pide la probabilidad de que el ratón (descendiente) sea homocogótico, sabiendo que ha sido negro:

$$P(H_M \mid N) = \frac{P(N \mid H_M)P(H_M)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad que puede obtener directamente, ya que si el ratón es negro, $N = \{BB, bB, Bb\}$, solo uno de los tres resultados (equiprobables) produce un ratón homocigótico (BB).

b) Con un razonamiento similar al del apartado a, se obtiene que:

$$P(H_T \mid M) = \frac{2}{3}$$

112. Se lanzan simultáneamente tres dados cúbicos iguales, con las caras numeradas del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que:

a) Salgan 3 doses.

b) La suma de las caras sea número par.

Suponiendo que los tres dados están equilibrados, los resultados posibles son equiprobables.

El número de resultados posibles es $VR_{6,3} = 216$.

a) Dado el suceso A = "los tres son doses", solo uno de los resultados posibles es favorable a este suceso, por lo que:

$$P(A) = \frac{1}{216}$$

b) Si llamamos B = "la suma de las caras es un número par", la mitad de los resultados posibles da como resultado suma par, por lo que:

$$P(B) = \frac{108}{216} = 0{,}5$$

AUTOEVALUACIÓN

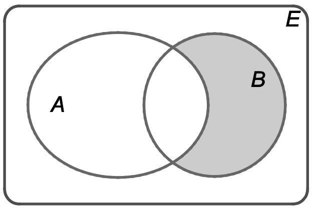
Comprueba qué has aprendido

1. El 60 % de los clientes de una frutería compra naranjas y el 30 % no compra ni naranjas ni manzanas. ¿Qué porcentaje de clientes compra manzanas pero no naranjas?

Se elige un cliente al azar. Sean los sucesos *A* = "el cliente compra naranjas"; *B* = "el cliente compra manzanas". Se sabe que $P(A) = 0{,}6$ y $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}3$.

Debe calcularse la probabilidad del suceso $\overline{A} \cap B$. Como puede observarse en el diagrama de Venn:

$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A \cup B) - P(A) = 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}1$$



donde, por la probabilidad del suceso contrario y una de las leyes de De Morgan:

$$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

De manera que el 10 % de los clientes compra manzanas pero no naranjas.

2. Se consideran dos sucesos *A* y *B* tales que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B \mid A) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calcula razonadamente:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(B)$

c) $P\left(\overline{B} \mid A\right)$

d) $P\left(\overline{A} \mid \overline{B}\right)$

a) $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$

b) $P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$

c) $P\left(\overline{B} \mid A\right) = 1 - P(B \mid A) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

d) $P\left(\overline{A} \mid \overline{B}\right) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P(\overline{B})} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$

3. Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número mayor que en la primera.

Sea *A* = "en la 2ª tirada se obtiene un número mayor que en la primera" y sea *X* = "se obtiene el mismo número".

En la siguiente tabla se muestran los posibles resultados:

D1 / D2	1	2	3	4	5	6
1	*X*	*A'*	*A'*	*A'*	*A'*	*A'*
2	*A*	*X*	*A'*	*A'*	*A'*	*A'*
3	*A*	*A*	*X*	*A'*	*A'*	*A'*
4	*A*	*A*	*A*	*X*	*A'*	*A'*
5	*A*	*A*	*A*	*A*	*X*	*A'*
6	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*X*

Luego la probabilidad pedida es $P(A) = \dfrac{15}{36}$.

4. Una empresa somete a control de calidad 7 de cada 10 artículos fabricados. De los que son sometidos al control resultan defectuosos un 2 % y de los que no son sometidos a control de calidad resultan defectuosos un 12 %. Elegido un artículo al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea defectuoso.

b) Haya sido sometido al control de calidad si es defectuoso.

Sean los sucesos *C* = "el artículo ha sido sometido a control de calidad" y su contrario $\overline{C}$ = "el artículo no ha sido sometido a control de calidad". Se tiene que $P(C)=0{,}7$, $P(\overline{C})=0{,}3$.

Se considera, además, el suceso *D* = "el artículo es defectuoso".

$P(D \mid C)=0{,}02$, $P(D \mid \overline{C})=0{,}12$

a) Por el teorema de la probabilidad total, se tiene que:

$$P(D)=P(D \mid C)P(C)+P(D \mid \overline{C})P(\overline{C})=0{,}02\cdot 0{,}7+0{,}12\cdot 0{,}3=0{,}05$$

b) Se pide la probabilidad del suceso *C*, condicionada a que el suceso *D* ha ocurrido. Utilizando la regla de Bayes:

$$P(C \mid D)=\frac{P(D \mid C)P(C)}{P(D)}=\frac{0{,}02\cdot 0{,}7}{0{,}05}=0{,}28$$

5. Se elige al azar un número entre el 10 000 y 50 000. Calcula la probabilidad de que el número extraído sea capicúa.

Comenzamos por estudiar cuántos números capicúas hay cuando la cifra inicial es 1. Para ello basta con fijar las dos siguientes cifras que pueden ser cualquiera de las 9 cifras significativas más el cero. Así, se tiene que:

$\underline{1}\ \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{A}\ \underline{1}$

Como *A* puede ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y *B* pueder ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 van a existir $10\cdot 10=100$ números capicúas entre 10 000 y 20 000.

Razonando de igual forma, entre 20 000 y 30 000 se tienen 100 números capicúas, entre 30 000 y 40 000 se tienen 100 números capicúasy entre 40 000 y 50 000 se tienen 100 números capicúas. Luego en total entre 10 000 y 50 000 hay $100+100+100+100=400$ números capicúas.

Aplicando la regla de Laplace se obtiene que:

$$P(C)=\frac{400}{40000}=\frac{1}{100}=0{,}01$$

6. En una fiesta en la que hay 85 mujeres y 90 hombres se eligen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Ninguna sea hombre.

b) Haya exactamente un hombre.

c) Haya más de un hombre.

d) Haya el mismo número de mujeres que de hombres.

Suponiendo que todas las elecciones posibles son igualmente probables y que no importa el orden en la elección de las personas, el número de resultados posibles al elegir 4 personas del conjunto de 175 personas es:

$$C_{175,4}=\binom{175}{4}=\frac{175\cdot174\cdot173\cdot172}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=37\,752\,925$$

a) Sea el suceso A = "ninguna de las cuatro personas elegidas es hombre"; es decir, que las cuatro personas han sido elegidas del grupo de las mujeres, con lo que el número de resultados favorables al suceso A es:

$$C_{85,4}=\binom{85}{4}=\frac{85\cdot84\cdot83\cdot82}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=2\,024\,785$$

Y, aplicando la regla de Laplace, se obtiene:

$$P(A)=\frac{2024785}{37752925}=0{,}0536$$

b) Sea B = "haya exactamente un hombre entre las cuatro personas elegidas". Si tiene que haber exactamente un hombre, las otras tres personas deben ser elegidas entre las mujeres, por lo que el número de resultados favorables al suceso B es:

$$C_{90,1}C_{85,3}=\binom{90}{1}\binom{85}{3}=\frac{90}{1!}\cdot\frac{85\cdot84\cdot83}{3!}=8\,889\,300$$

Aplicando la regla de Laplace:

$$P(B)=\frac{8889300}{37752925}=0{,}2355$$

c) El suceso C = "haya más de un hombre" es el suceso contrario del suceso unión de los sucesos incompatibles A = "no haya ningún hombre" y B = "haya exactamente un hombre", cuyas probabilidades han sido calculadas en los aparatados a y b. De esta manera:

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0{,}0536-0{,}2355=0{,}7109$$

d) En este caso, el número de resultados favorables al suceso D = "haya el mismo número de mujeres que de hombres" es:

$$C_{85,2}C_{90,2}=\binom{85}{2}\binom{90}{2}=\frac{85\cdot84}{2}\cdot\frac{90\cdot89}{2}=14\,297\,850$$

Y, su probabilidad se obtiene aplicando la regla de Laplace:

$$P(D)=\frac{14\,297\,850}{37\,752\,925}=0{,}3787$$

7. El 50 % de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte *A* y el 40 % afirma practicar el deporte *B*. Además, se sabe que el 70 % de los jóvenes practica el deporte *A* o el *B*. Si se elige un joven al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.

b) La probabilidad de que practique solo el deporte *A*.

c) Si practica el deporte *B*, ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte *A*?

d) ¿Son independientes los sucesos "practicar el deporte *A*" y "practicar el deporte *B*"? ¿Por qué?

Sean los sucesos *A* = "el joven elegido práctica el deporte *A*" y *B* = "el joven elegido practica el deporte *B*". Se sabe que $P(A)=0{,}5$, $P(B)=0{,}4$ y $P(A\cup B)=0{,}7$.

a) Se pide la probabilidad del suceso $\overline{A}\cap\overline{B}$. Utilizando una de las leyes de De Morgan:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0{,}7=0{,}3$$

b) En este caso, se debe calcular la probabilidad del suceso $A-B=A\cap\overline{B}$.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0{,}5-0{,}2=0{,}3$$

Donde $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}5+0{,}4-0{,}7=0{,}2$

c) Se debe calcular la probabilidad del suceso *A*, condicionada a que ocurra el suceso *B*:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}2}{0{,}4}=0{,}5$$

d) Como $P(A\cap B)=0{,}2$ y $P(A)P(B)=0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}2$, resulta que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ y, por tanto, los sucesos *A* y *B* son independientes.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Sea *A* y *B*, sucesos incompatibles asociados a un espacio muestral *E*, con $P(A)>0$, $P(B)>0$. Entonces:

A. *A* y *B* son independientes.

B. $P(A\mid B)\neq P(B\mid A)$

C. $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son incomptatibles.

D. $P(A\mid B)=0$

La respuesta correcta es la D por eliminación de las respuestas anteriores ya que *A* y *B* son independientes si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ y como $P(A)>0, P(B)>0$ no se verifica la igualdad. En la B puede ocurrir que $P(A)=P(B)$ lo cual verifica la igualdad y por último la C no implica que sus contrarios también lo sean. Además como $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ se tiene que $P(A\mid B)=0$.

2. **Dos sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio son independientes si:**

A. Cuando ocurre, por ejemplo, *A* entonces *B* no ocurre.

B. Cuando uno de ellos ocurre, el otro ya no puede ocurrir.

C. *A* y *B* tienen la misma probabilidad.

D. La probabilidad de *A*, por ejemplo, no se ve modificada por el hecho de que *B* ocurra.

La respuesta correcta es la D ya que si ocurre el suceso *B* no afecta a la probabilidad del suceso *A*.

3. **Si *A* y *B* son dos sucesos asociados a un espacio muestral *E* , con $P(A|B)=\frac{1}{2}P(B|A)$, entonces:**

A. Siempre que ocurre *B*, ocurre *A*.

B. La probabilidad de *B* es doble que la de *A*.

C. Si ocurre *A*, no ocurre *B*.

D. Los sucesos *A* y *B* son incompatibles.

La respuesta correcta es la B pues la probabilidad de $A\cap B$ se define como:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A) \text{ o } P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$$

Igualando se tiene que:

$$P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

Finalmente despejando se llega a que:

$$P(B)=\frac{P(A)\cdot 2P(A|B)}{P(A|B)}=2P(A)$$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Si *A* y *B* son sucesos incompatibles, siendo la probabilidad de *A* doble que la de *B* y con $P(B)>0$, entonces:**

A. $P(A\cup B)=3P(B)$

B. El suceso *B* está contenido en *A*.

C. $P(\overline{B}\,|\,A)=1$

D. $P\left(\overline{A}\,|\,\overline{B}\right)>P(A)$

Se sabe que $P(A)=2P(B)$ y $A\cap B=\varnothing$, luego por las propiedades de la probabilidad se tiene que:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=2P(B)+P(B)=3P(B)$$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada se tiene que:

$$P(\overline{B}\,|\,A)=1-P(B\,|\,A)=1-\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=1$$

Por tanto, las respuestas correctas son A y C.

5. Si *A* y *B* son dos sucesos asociados a un espacio muestral *E*, y $P\left(A \mid \overline{B}\right) = 1$, entonces:

A. $P\left(A - B\right) = 1 - P(B)$

B. $P\left(A\right) = P(\overline{B})$

C. $P\left(A \cup B\right) = 1$

D. $P\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right) = 0$

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = 1 \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = 1 - P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = 1$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 1 - P(B)$$

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{A})} = 0$$

Las respuestas correctas son A, C y D.

Señala el dato innecesario para contestar

6. Si *A*, *B* y *C* son tres sucesos incompatibles dos a dos, para calcular la probabilidad de $\left(\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}}\right)$ se necesita:

A. $P(A)$, $P(B)$

B. $P(A \cap B \cap C)$

C. $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ y $P(B \cap C)$

D. $P(C)$

Aplicando la regla de la multiplicación de probabilidades condicionadas se sabe que:

$$P\left(A \cap B \cap C\right) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B)$$

y como $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ y $B \cap C = \varnothing$ por tanto la respuesta correcta es la C.

7. Si *A*, *B* y *C* son tres sucesos tales que $B \cap C = \varnothing$, para calcular $P(\overline{A} \mid B \cup C)$, se precisa:

A. $P(A)$

B. $P\left(A \cap B\right)$

C. $P(B)$ y $P(C)$

D. $P(A \cap C)$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada se tiene que:

$$P(\overline{A} \mid B \cup C) = \frac{P\left(\overline{A} \cap (B \cup C)\right)}{P\left(B \cup C\right)} = \frac{P\left[\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap C\right)\right]}{P\left(B \cup C\right)} = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A} \cap C\right)}{P(B) + P(C) - P\left(B \cap C\right)} = \frac{P(B) - P\left(A \cap B\right) + P(C) - P\left(A \cap C\right)}{P(B) + P(C) - P\left(B \cap C\right)}$$

Luego la respuesta correcta es la A.

14 Distribuciones de probabilidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Sea *X* una variable aleatoria que toma los valores 0, 1, 2 y 3 con probabilidades respectivas 0,2; 0,25; 0,4; 0,15. Calcula su media, su varianza y *P*(*X* > 1).

La esperanza es $\mu = E[X] = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}25 + 2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0{,}15 = 1{,}5$.

Para calcular la varianza se necesita obtener antes $E[X^2] = 0^2\cdot 0{,}2 + 1^2\cdot 0{,}25 + 2^2\cdot 0{,}4 + 3^2\cdot 0{,}15 = 3{,}2$.

Luego, la varianza es $\text{Var}(X) = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = 3{,}2 - 1{,}5^2 = 0{,}95$.

Por último, la probabilidad que se pide $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}4 + 0{,}15 = 0{,}55$.

3. Se lanzan dos dados de distinto color y se considera la variable *X*: “suma de las puntuaciones obtenidas”.

a) Escribe su función de masa de probabilidad y represéntala mediante un diagrama de barras.

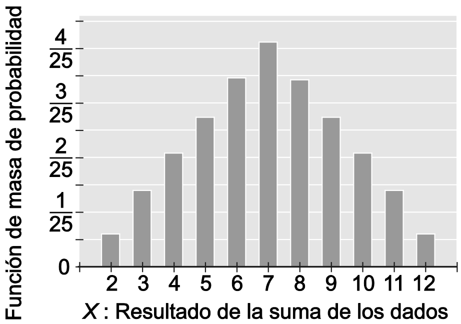
b) Calcula la media y la varianza de *X*.

En el lanzamiento de dos dados se tienen $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ resultados posibles equiprobables.

a) La variable aleatoria *X* toma los valores del 2 al 12. La probabilidad de cada uno de los valores se obtiene mediante la regla de Laplace, sin más que contar el número de resultados favorables a cada valor. Por tanto, la función de masa de probabilidad de *X* es:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

El diagrama de barras que representa la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria *X* es:



b) La esperanza de la variable aleatoria *X* es:

$$E[X] = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{1}{18} + 4\cdot\frac{1}{12} + 5\cdot\frac{1}{9} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{1}{6} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{1}{9} + 10\cdot\frac{1}{12} + 11\cdot\frac{1}{18} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

Para calcular la varianza, es preciso obtener primero la esperanza de X^2 .

$$E[X^2] = 2^2\cdot\frac{1}{36} + 3^2\cdot\frac{1}{18} + 4^2\cdot\frac{1}{12} + 5^2\cdot\frac{1}{9} + 6^2\cdot\frac{5}{36} + 7^2\cdot\frac{1}{6} + 8^2\cdot\frac{5}{36} + 9^2\cdot\frac{1}{9} + 10^2\cdot\frac{1}{12} + 11^2\cdot\frac{1}{18} + 12^2\cdot\frac{1}{36} = \frac{329}{6}$$

De manera que la varianza de *X* es $\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$.

4. De una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 rojas, se extraen 3 bolas sucesivamente sin reemplazamiento. Sea la variable aleatoria *Y*: "numero de bolas blancas extraídas". Determina:

a) Su función de masa de probabilidad.

b) Su media y su varianza.

c) La probabilidad de que se extraigan al menos dos bolas blancas.

Como lo que interesa es el número de bolas blancas y no el orden en el que se han obtenido, se puede considerar que las bolas se extraen simultáneamente, ya que las bolas no se reemplazan. De esta manera, el número de resultados posibles al extraer tres bolas de la urna es el número de combinaciones de orden 3 (las tres bolas que se extraen) de 8 elementos (las ocho bolas de la urna). Esto es:

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$$

a) La variable Y: "número de bolas blancas extraídas" puede tomar los valores 0, 1, 2, y 3 con probabilidades, que se pueden obtener por la regla de Laplace, en el numerador va el número de resultados favorables en cada caso:

$$P(Y=0) = \frac{\binom{3}{3}}{56} = \frac{1}{56} \qquad P(Y=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{56} = \frac{15}{56} \qquad P(Y=2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{56} = \frac{30}{56} \qquad P(Y=3) = \frac{\binom{5}{3}}{56} = \frac{10}{56}$$

De modo que la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria Y se puede resumir en la tabla:

Y	0	1	2	3
***P*(*Y* = *y*)**	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

b) La esperanza de la variable aleatoria *Y* es $E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{56} + 1 \cdot \frac{15}{56} + 2 \cdot \frac{15}{28} + 3 \cdot \frac{5}{28} = \frac{15}{8}$.

Para calcular la varianza es preciso obtener antes la esperanza de Y^2:

$$E[Y^2] = 0^2 \cdot \frac{1}{56} + 1^2 \cdot \frac{15}{56} + 2^2 \cdot \frac{15}{28} + 3^2 \cdot \frac{5}{28} = \frac{225}{56}$$

De manera que la varianza de *Y* es $\text{Var}(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{225}{56} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{448}$.

c) $P(Y \geq 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = \frac{15}{28} + \frac{5}{28} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$

5 y 6. Ejercicios resueltos.

7. Halla en cada caso la probabilidad indicada.

a) $X \sim \text{Bin}(n = 5, p = 0{,}15), P(X < 4)$

b) $Y \sim \text{Bin}(n = 7, p = 0{,}65), P(Y \geq 4)$

a) $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}4437 + 0{,}3915 + 0{,}1382 + 0{,}0244 = 0{,}9978$

Estas probabilidades pueden obtenerse de la tabla o mediante:

$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^5 = 0{,}4437$, $P(X = 1) = \binom{5}{1} 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^4 = 0{,}3915$ $P(X = 2) = \binom{5}{2} 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^3 = 0{,}1382$

y $P(X = 3) = \binom{5}{3} 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^2 = 0{,}0244$.

b) $P(Y \geq 4) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6) + P(Y = 7)$

Como estas probabilidades no vienen directamente en la tabla, se puede tomar $X \sim \text{Bin}(n = 7, p = 0{,}35)$

$P(Y = 4) = P(X = 3) = 0{,}2679$, $P(Y = 5) = P(X = 2) = 0{,}2985$, $P(Y = 6) = P(X = 1) = 0{,}1848$ y
$P(Y = 7) = P(X = 0) = 0{,}0490$

Luego $P(Y \geq 4) = 0{,}2679 + 0{,}2985 + 0{,}1848 + 0{,}0490 = 0{,}8002$

8. Se sabe que una máquina produce un 10 % de tornillos defectuosos. En un control de calidad, se seleccionan 6 tornillos al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Haya uno defectuoso.

b) Al menos haya uno defectuoso.

Sea la variable aleatoria *X*: “número de tornillos defectuosos, entre los 6 seleccionados”.

La probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea defectuoso es $p = 0{,}1$, de manera que la variable aleatoria X sigue una distribución binomial $X \sim \text{Bin}(n = 6; p = 0{,}1)$.

a) La probabilidad de que, entre los 6, haya uno defectuoso es:

$$P(X = 1) = \binom{6}{1} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^5 = 0{,}3543$$

b) La probabilidad de que al menos una de los 6 tornillos sea defectuoso, se puede calcular como sigue:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^6 = 0{,}4686$$

Nota: El valor de las probabilidades calculadas puede obtenerse directamente de la tabla de la binomial.

9. Se lanza cinco veces una moneda trucada de manera que la probabilidad de que salga cara es el triple de la que salga cruz. Halla la probabilidad de que salgan más caras que cruces.

Sea $P(X) = p \Rightarrow P(C) = 3p$ entonces $p + 3p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$.

Luego sustituyendo se tiene que $P(X) = \frac{1}{4}$ y $P(C) = \frac{3}{4}$.

Sea *X* = número de cruces, sigue una distribución $\text{Bin}(n = 5; p = 0{,}25)$. Luego la probabilidad pedida es:

$\text{P}(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

Estos valores pueden obtenerse directamente de la tabla, luego:

$P(X < 3) = 0{,}2373 + 0{,}3955 + 0{,}2637 = 0{,}8965$

10. Se lanza 9 veces un dado equilibrado. ¿Cuántas veces hay que lanzar el dado para obtener al menos un 6 con probabilidad igual o superior a 0,9?

Sea la variable aleatoria *X*: "número de seises que se obtienen al lanzar un dado 9 veces". La variable X sigue una distribución binomial $X \sim \text{Bin}\left(n=9; p=\frac{1}{6}\right)$.

Si *k* es el número de veces que hay que lanzar el dado para obtener por lo menos un seis con probabilidad mayor o igual que 0,9, se plantea que:

$$P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \Rightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^k \geq 0{,}9 \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^k \leq 0{,}1$$

Tomando logaritmos neperianos la desigualdad se conserva (el logaritmo neperiano es una función creciente):

$$k \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}1) \Rightarrow k \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 12{,}629$$

La última desigualdad se debe a que, al "despejar" k, se divide por un número negativo $\ln\left(\frac{5}{6}\right) = -0{,}1823215$, y, por tanto la desigualdad cambia de sentido.

De modo que el dado debe lanzarse al menos 13 veces para que se obtenga al menos un seis con probabilidad superior a 0,9.

11. Ejercicio interactivo.

12. Ejercicio resuelto.

13. En un país la tasa de paro es del 26 % de su población activa. Si se toma una muestra de 50 personas adultas y se les pregunta por su situación laboral, ¿Cuál será el número esperado de desempleados? ¿Y su desviación típica?

Si se considera la variable aleatoria *X*: "número de personas desempleadas, de las 50 seleccionadas", la variable *X* sigue una distribución binomial $X \sim \text{Bin}(n=50; p=0{,}26)$.

El número esperado de desempleados, entre los 50, es $E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}26 = 13$.

Y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}26 \cdot 0{,}74} = 3{,}1016$.

14. Un fármaco produce cefaleas en un 40 % de pacientes que lo toman. De 7 pacientes con este tratamiento, seleccionados al azar, calcula el número esperado de ellos que sufrirán ese efecto secundario y la probabilidad de que lo sufran:

a) Al menos dos.

b) Más de 4.

Sea *Y*: "número de personas que sufren efectos secundarios, de los 7 seleccionados". La variable *Y* sigue una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n=7; p=0{,}4)$.

El número esperado de pacientes que sufrirá efectos secundarios es $E[Y] = n \cdot p = 7 \cdot 0{,}4 = 2{,}8$.

a) $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - 0{,}0280 - 0{,}1306 = 0{,}8414$

b) $P(Y > 4) = P(Y=5) + P(Y=6) + P(Y=7) = 0{,}0774 + 0{,}0172 + 0{,}0016 = 0{,}0962$

15. Una encuesta reciente revela que en una ciudad el 35 % de los adultos aprueba la gestión del equipo de gobierno municipal, mientras el resto la desaprueba. Si de la población se eligen al azar 8 personas, calcula:

a) La probabilidad de que ninguno apruebe la gestión.

b) La probabilidad de que la aprueben exactamente 4.

c) El número esperado de personas que la aprueba.

d) La desviación típica del número de personas que aprueban la gestión.

Considera la variable aleatoria X: "número de personas, de las 8 seleccionadas, que aprueba la gestión". La variable X sigue una distribución binomial $X \sim \text{Bin}(n = 8; p = 0{,}35)$.

a) $P(X = 0) = 0{,}65^8 = 0{,}0319$

b) $P(X = 4) = \binom{8}{4} 0{,}35^4 \cdot 0{,}65^4 = 0{,}1875$

c) Se calcula la esperanza de la variable X y es $E[X] = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}35 = 2{,}8$.

d) En primer lugar se calcula la varianza y luego su raíz cuadrada positiva:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 8 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 1{,}82 \Rightarrow \sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1{,}82} = 1{,}34907$$

16. Ejercicio resuelto.

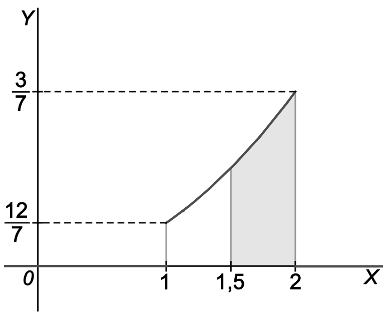
17. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es: $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

a) Calcula su esperanza y su varianza.

b) Calcula $P\left(X > \frac{3}{2}\right); P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{19}{10}\right)$

a) La esperanza de la variable X es:

$$E[X] = \int_1^2 x \frac{3}{7} x^2 dx = \frac{3}{7}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{7}\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{45}{28}$$

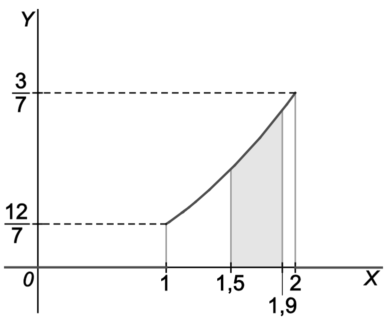


Para calcular la varianza se debe obtener antes el valor de $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \int_1^2 x^2 \frac{3}{7} x^2 dx = \frac{3}{7}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{3}{7}\left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{93}{35}$$

Y la varianza de X es $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{93}{35} - \left(\frac{45}{28}\right)^2 = 0{,}07423$.

b) Ambas probabilidades se obtienen calculando el área bajo la función de densidad en cada uno de los dos casos:



$$P\left(X > \frac{3}{2}\right) = \int_{1'5}^2 \frac{3}{7} x^2 dx = \frac{3}{7}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1{,}5}^2 = \frac{3}{7}\left(\frac{8}{3} - \frac{3{,}375}{3}\right) = 0{,}66071$$

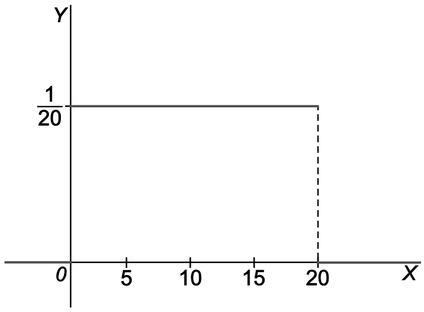
$$P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{19}{10}\right) = \int_{1'5}^{1'9} \frac{3}{7} x^2 dx = \frac{3}{7}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1{,}5}^{1{,}9} = \frac{3}{7}\left(\frac{6{,}859}{3} - \frac{3{,}375}{3}\right) = 0{,}49771$$

18. El tiempo de espera para un viajero en una parada de autobús es una variable aleatoria con función de densidad:

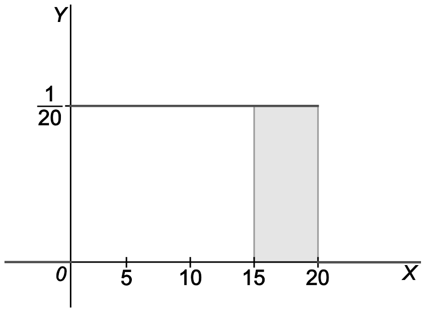
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20} & \text{si } 0\le x\le 20\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Dibuja su gráfica y calcula la probabilidad de que un usuario elegido al azar deba esperar más de 15 minutos.

La gráfica de la función de densidad:



La probabilidad de que el usuario elegido al azar espere más de 15 minutos es $P(X>15)=(20-15)\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{4}$



19. Utilizando la tabla de la normal estándar, determina *a* o *p* en cada caso.

a) $P(Z\le 1{,}46)=p$

b) $P(Z>2{,}13)=p$

c) $P(Z\ge -0{,}78)=p$

d) $P(-2{,}33\le Z<0{,}05)=p$

e) $P(-0{,}57\le Z\le -0{,}12)=p$

f) $P(Z<a)=0{,}0026$

g) $P(Z\ge a)=0{,}8345$

h) $P(-a\le Z<a)=0{,}9676$

a) $P(Z\le 1{,}46)=p=0{,}92785$

b) $P(Z>2{,}13)=1-P(Z<2{,}13)=1-0{,}98341=0{,}01659$

c) $P(Z\ge -0{,}78)=P(Z\le 0{,}78)=0{,}78230$

d) $P(-2{,}33\le Z<0{,}05)=P(Z<0{,}05)-P(Z<-2{,}33)=\Phi(0{,}05)-(1-\Phi(2{,}33))=0{,}51994-(1-0{,}99010)=0{,}51004$

e) $P(-0{,}57\le Z\le -0{,}12)=P(Z<-0{,}12)-P(Z<-0{,}57)=1-\Phi(0{,}12)-(1-\Phi(0{,}57))=$
$=1-0{,}54776-(1-0{,}71566)=0{,}16790$

f) En este caso, el valor de la probabilidad (0,0026) no viene directamente en la tabla ya es menor que 0,5. Ello indica que $a<0$ y se procede de la siguiente manera:

$P(Z<a)=0{,}0026\Rightarrow P(Z<-a)=1-P(Z<a)=0{,}9974\Rightarrow -a=2{,}8\Rightarrow a=-2{,}8$

g) $P(Z\ge a)=0{,}8345\Rightarrow P(Z<-a)=0{,}8345\Rightarrow -a=0{,}97(\text{aprox})\ \Rightarrow a=-0{,}97(\text{aprox})$

h) $P(-a\le Z\le a)=2\Phi(a)-1=0{,}9676\Rightarrow \Phi(a)=0{,}9838\Rightarrow a=2{,}14$

20 a 22. Ejercicios resueltos.

23. Un fabricante de un cierto tipo de motores asegura que la duración de su producto tiene una distribución normal de media 10 años de uso con una varianza de 4. Calcula la probabilidad de que un motor elegido al azar dure:

a) Más de 12 años.

b) Menos de 9 años.

c) Entre 10 y 11 años.

Si un comerciante compra un lote de 100 motores al fabricante, calcula cuántos motores puede esperarse que duren:

d) Más de 7 años.

e) Más de 9 años.

Considera la variable aleatoria *X*: "duración de los motores". Sabemos que $X \sim N\left(\mu = 10; \sigma^2 = 4\right)$.

a) $P(X > 12) = P\left(Z > \frac{12-10}{2}\right) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

b) $P(X < 9) = P\left(Z < \frac{9-12}{2}\right) = P(Z < -1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

c) $P(10 < X < 11) = P\left(\frac{10-10}{2} < Z < \frac{11-10}{2}\right) = P(0 < Z < 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(0) = 0{,}6915 - 0{,}5 = 0{,}1915$

d) Para calcular el número de motores que se espera que duren 7 años, en primer lugar se calcula la probabilidad de que un motor elegido al azar dure más de 7 años:

$$P(X > 7) = P\left(Z > \frac{7-10}{2}\right) = P(Z > -1{,}5) = \Phi(1{,}5) = 0{,}9332$$

Por lo que se estima que el 93,32 % de los motores durará más de 7 años. Si un comerciante compra 100 motores, se espera que aproximadamente 93 de ellos duren más de 7 años.

e) $P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-10}{2}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0{,}8413$

De forma que aproximadamente 84 motores, de los 100, durarán más de 9 años.

24. Una máquina produce tuercas cuyo diámetro tiene una distribución normal de media 5 cm y desviación típica 2 mm. No se pueden vender las tuercas que se desvíen 3 mm de la media. De un lote de 500 tuercas, ¿Cuántas deben ser descartadas para la venta?

Sea la variable *X*: "diámetro de las tuercas producidas por la máquina". Con las medidas expresadas en milímetros, se tiene que $X \sim N(\mu = 50; \sigma = 2)$.

Solo son aptas para la venta las tuercas cuyo diámetro esté entre 47 y 53 mm. Por tanto, la probabilidad de que una tuerca elegida al azar sea apta para la venta es:

$$P(47 < X < 53) = P\left(\frac{47-50}{2} < Z < \frac{53-50}{2}\right) = P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(1{,}5) - \left(1 - \Phi(1{,}5)\right) =$$
$$= 2\Phi(1{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9332 - 1 = 0{,}8664$$

De manera que el 86,64 % de las tuercas producidas son aptas para la venta y se descartarán el 13,36 %. Por tanto, de un lote de 500 tuercas, se descartarán $0{,}1336 \cdot 500 = 66{,}8$ es decir aproximadamente 67 tuercas.

25. A una prueba de acceso de una universidad se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y varianza 4. Calcula la nota de corte para los admitidos.

Considera la variable aleatoria *X*: "calificación del examen". Su distribución es $X \sim N\left(\mu = 6{,}5; \sigma^2 = 4\right)$

Para establecer la nota de corte, se calcula la proporción que representan 300 plazas de 2500 aspirantes:

$$\frac{300}{2500} = 0{,}12$$

De manera que se debe buscar la calificación *a* tal que $P(X > x) = 0{,}12$. O de forma equivalente:

$$1 - P\left(X < a\right) = 0{,}12 \Rightarrow P\left(X < a\right) = 0{,}88$$

Tipificando en la última expresión y buscando en las tablas de la normal, se tiene que:

$$P\left(Z < \frac{a - 6{,}5}{2}\right) = 0{,}88 \Rightarrow \frac{a - 6{,}5}{2} = 1{,}175 \Rightarrow a = 8{,}85$$

Luego la nota de corte es 8,85 puntos.

26. Un supermercado ha hecho un estudio sobre el número de productos que escanean sus cajeras, llegando a la conclusión de que dicho número, por cajera y minuto, sigue una ley normal de media 33 y desviación típica 4. Si se elige al azar una cajera, calcula la probabilidad de que escanee en un minuto:

a) Más de 35 productos.

b) Menos de 31 productos.

c) Un número de productos comprendido entre 30 y 34.

Se considera la variable *X*: "número de productos que, por minuto, escanea la cajera". La variable X sigue una distribución normal $X \sim N\left(\mu = 33; \sigma = 4\right)$.

a) $P\left(X > 35\right) = P\left(Z > \frac{35 - 33}{4}\right) = P\left(Z > 0{,}5\right) = 1 - \Phi\left(0{,}5\right) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

b) $P\left(X < 31\right) = P\left(Z < \frac{31 - 33}{4}\right) = P\left(Z < -0{,}5\right) = P\left(Z > 0{,}5\right) = 1 - \Phi\left(0{,}5\right) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

c) $P\left(30 < X < 34\right) = P\left(\frac{30 - 33}{4} < Z < \frac{34 - 33}{4}\right) = P\left(-0{,}75 < Z < 0{,}25\right) = \Phi\left(0{,}25\right) - \Phi\left(-0{,}75\right) =$

$= \Phi\left(0{,}25\right) - \left(1 - \Phi\left(0{,}75\right)\right) = 0{,}5987 - 1 + 0{,}7734 = 0{,}3721$

27. Ejercicio interactivo.

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. El 40 % de las personas empadronadas en una ciudad viven en urbanizaciones alejadas del centro. De una muestra de 1500 personas, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 580 vivan en urbanizaciones?

Sea la variable aleatoria *Y*: "número de personas, de las 1500, que viven en urbanizaciones alejadas del centro". La variable *Y* sigue una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}\left(n = 1500; p = 0{,}4\right)$ que puede aproximarse por una variable *X* con distribución normal de media $\mu = 1500 \cdot 0{,}4 = 600$ y varianza $\sigma^2 = 1500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 360$. Esto es $X \sim N\left(\mu = 600; \sigma = \sqrt{360}\right)$. La probabilidad que se pide es:

$$P\left(Y < 580\right) \cong P\left(X \le 579{,}5\right) = P\left(Z \le \frac{579{,}5 - 600}{\sqrt{360}}\right) = P\left(Z \le -1{,}08\right) = 1 - \Phi\left(1{,}08\right) = 1 - 8599 = 0{,}1401$$

31. En una población, el 45 % de las personas adultas se declara consumidora de café. Si de la ciudad elegimos una muestra de 250 personas adultas, calcula la probabilidad de que más de la mitad tomen café.

Sea la variable Y: "número de consumidores de café, entre los 250", cuya distribución es binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 250; p = 0{,}45)$ que puede aproximarse por una variable X con distribución normal de media $\mu = 250 \cdot 0{,}45 = 112{,}5$ y varianza $\sigma^2 = 250 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 61{,}875$. Esto es $X \sim N\left(\mu = 112{,}5; \sigma = \sqrt{61{,}875}\right)$.

La probabilidad que se pide es:

$$P(Y > 125) \cong P(X > 125{,}5) = P\left(Z > \frac{125{,}5 - 112{,}5}{\sqrt{61{,}875}}\right) = P(Z > 1{,}65) = 1 - \Phi(1{,}65) = 1 - 0{,}9505 = 0{,}0495$$

32. El primer examen de una oposición es un test consta de una batería de 100 preguntas cada una de las cuales tiene 5 posibles respuestas de las que solo una es correcta. Si una persona responde al azar, calcula la probabilidad de que acierte al menos 25 preguntas.

Sea la variable aleatoria Y: "número de respuestas acertadas de las 10", que sigue una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 100; p = 0{,}2)$. Ya que si una persona responde al azar, la probabilidad de acertar una pregunta es $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

La distribución de probabilidad de la variable Y puede aproximarse por la de una variable X con distribución normal de media $\mu = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ y varianza $\sigma^2 = 100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 16$. Esto es $X \sim N(\mu = 20; \sigma = 4)$.

La probabilidad que se pide es:

$$P(Y \geq 25) \cong P(X \geq 24{,}5) = P\left(Z \geq \frac{24{,}5 - 20}{4}\right) = P(Z \geq 1{,}13) = 1 - \Phi(1{,}13) = 1 - 0{,}8708 = 0{,}1292$$

Donde $\Phi(1{,}13) = 0{,}8708$ se ha obtenido de la tabla de la $N(0,1)$

33. Ejercicio interactivo.

34 a 42. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Variable aleatoria discreta

43. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta, *X*, viene dada en la tabla siguiente:

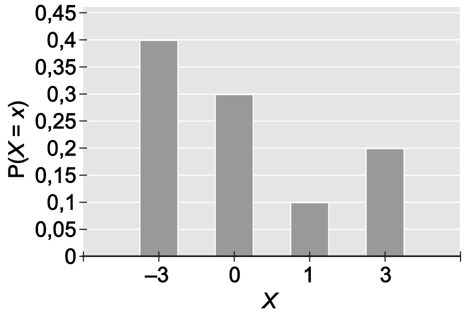
x_j	-3	0	1	3
p_j	0,4	0,3	0,1	0,2

a) Representa gráficamente la distribución.

b) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de *X*.

c) Calcula $P(1 < X < 2{,}5)$ y $P(X < 1)$.

a) La función de masa de probabilidad se puede representar por un diagrama de barras:



b) La esperanza de la variable *X* es $E[X] = -3 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 = -0{,}5$.

Para calcular la varianza se calcula en primer lugar la esperanza de X^2:

$E[X^2] = (-3)^2 \cdot 0{,}4 + 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}2 = 5{,}5$

La varianza de *X* es $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 5{,}5 - (-0{,}5)^2 = 5{,}25$.

La desviación típica de *X* es $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{5{,}25} \cong 2{,}2913$.

c) Para calcular las probabilidades que se piden, se suman las probabilidades de los valores de X que correspondan en cada caso:

$P(1 < X < 2{,}5) = 0$ porque *X* no toma ningún valor en el intervalo $(1; 2{,}5)$.

$P(X < 1) = P(X = -3) + P(X = 0) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

44. Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $P(X=x)=\dfrac{k}{x+1}$ para $x=0, 1, 2, 3$.

a) Calcula el valor de la constante k.

b) Representa gráficamente la función de masa.

c) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica de X.

d) Calcula $P(0{,}5<X<3{,}5)$.

a) La suma de las probabilidades de los valores de la variable debe ser 1, es decir:

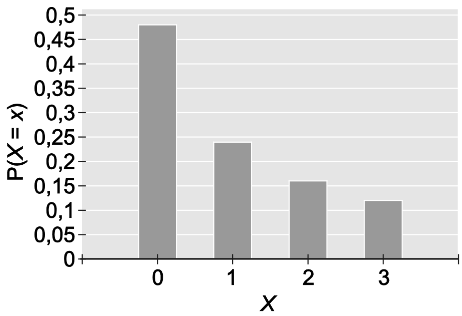
$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

$$\frac{k}{1}+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}=1 \Rightarrow k=\frac{12}{25}=0{,}48$$

b) La función de masa de probabilidad de la variable X, se puede recoger en la tabla siguiente:

X	0	1	2	3
***P*(*X* = *x*)**	0,48	0,24	0,16	0,12

Y el diagrama de barras correspondiente:



c) La esperanza de la variable X es $E[X]=0\cdot 0{,}48+1\cdot 0{,}24+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}12=0{,}92$.

Para calcular la varianza se calcula en primer lugar la esperanza de X^2 :

$$E[X^2]=0^2\cdot 0{,}48+1^2\cdot 0{,}24+2^2\cdot 0{,}16+3^2\cdot 0{,}12=1{,}96$$

La varianza de X es $\text{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=1{,}96-(0{,}92)^2=1{,}1136$.

La desviación típica de X es $\sigma=\sqrt{\text{Var}(X)}=\sqrt{1{,}1136}\cong 1{,}0553$.

d) La probabilidad del intervalo (0,5; 3,5) se obtiene sumando las probabilidades de los valores de X incluidos en el mismo:

$$P(0{,}5<X<3{,}5)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}24+0{,}16+0{,}12=0{,}52$$

45. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X* viene dada en la tabla siguiente:

x_j	1	2	3	4	5
p_j	0,07	a	0,2	b	0,33

Además, $P(X \le 4) = 0{,}67$ y $P(X \ge 4) = 0{,}6$. Calcula:

a) Los valores de *a* y *b* para completar la tabla.

b) Dibuja la gráfica de la función de masa de *X*.

c) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

d) Halla la probabilidad $P(2 \le X < 5)$.

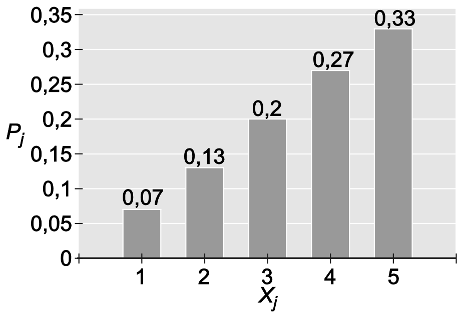
a) $P(X \ge 4) = 0{,}6 \Rightarrow P(X=4) + P(X=5) = 0{,}6$ de esta última expresión se obtiene $b + 0{,}33 = 0{,}6 \Rightarrow b = P(X=4) = 0{,}27$.

Mientras que $P(X \le 4) = 0{,}67 \Rightarrow P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0{,}67$ y de la última expresión, se obtiene $0{,}07 + a + 0{,}2 + 0{,}27 = 0{,}67 \Rightarrow a = P(X=2) = 0{,}13$.

Entonces, la función de masa de probabilidad de la variable *X* queda:

x_j	1	2	3	4	5
p_j	0,07	0,13	0,2	0,27	0,33

b) El diagrama de barras que representa la función de masa de probabilidad es:



c) La esperanza de la variable *X* es $E[X] = 1 \cdot 0{,}07 + 2 \cdot 0{,}13 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}27 + 5 \cdot 0{,}33 = 3{,}66$.

Para calcular la varianza se debe calcular antes:

$$E[X^2] = 1^2 \cdot 0{,}07 + 2^2 \cdot 0{,}13 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}27 + 5^2 \cdot 0{,}33 = 14{,}96$$

La varianza es $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 14{,}96 - 3{,}66^2 = 1{,}5644$.

d) La probabilidad del intervalo $[2,5)$ se obtiene sumando las probabilidades de los valores de *X* incluidos en el mismo:

$$P(2 \le X < 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0{,}13 + 0{,}2 + 0{,}27 = 0{,}6$$

Variables aleatorias binomiales

46. La variable aleatoria *X* tiene una distribución binomial de parámetros *n* = 8 y *p* = 0,6. Calcula:

a) La esperanza y la varianza de *X*.

b) $P(X<6)$ y $P(X\geq 5)$

c) $P(3\leq X<5)$

d) $P(0<X<2)$

a) La esperanza de X es $E[X]=n\cdot p=8\cdot 0{,}6=4{,}8$.

Y su varianza es $\sigma^2=\text{Var}(X)=n\cdot p\cdot q=8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=1{,}92$.

b) Se calculan las probabilidades directamente o por medio de la tabla. En este último caso es preciso utilizar la distribución de $Y\sim \text{Bin}(n=8, p=0{,}4)$. Es decir:

$$P(X<6)=1-[P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)]=1-[P(Y=2)+P(Y=1)+P(Y=0)]=$$
$$=1-(0{,}2090+0{,}0896+0{,}0168)=0{,}6846$$

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=P(Y=3)+P(Y=2)+P(Y=1)+P(Y=0)=$$
$$=0{,}2787+0{,}2090+0{,}0896+0{,}0168=0{,}5941$$

c) De forma similar a la del apartado anterior:

$$P(3\leq X<5)=P(X=3)+P(X=4)=P(Y=5)+P(Y=4)=0{,}2322+0{,}1239=0{,}3561$$

d) Procediendo como en los apartados anteriores:

$$P(0<X<2)=P(X=1)=P(Y=7)=0{,}0079$$

Variables aleatorias continuas

47. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(X)=\begin{cases} k(2-x) & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$.

a) Halla el valor de k y representa gráficamente la función de densidad.

b) Calcula $P\left(X>\frac{1}{2}\right)$.

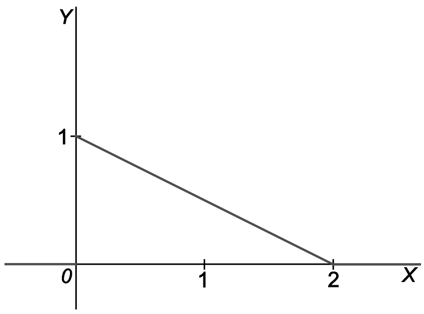
c) Calcula la esperanza y la varianza de la variable X.

a) Para hallar el valor de k, el área encerrada por la gráfica de la función, el eje X y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, debe ser 1:

$$1=\int_0^2 k(2-x)dx=k\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2=k(4-2)=2k\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Luego la función de densidad de X es $f(x)=\begin{cases}\frac{2-x}{2} & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$.

Y su gráfica es:

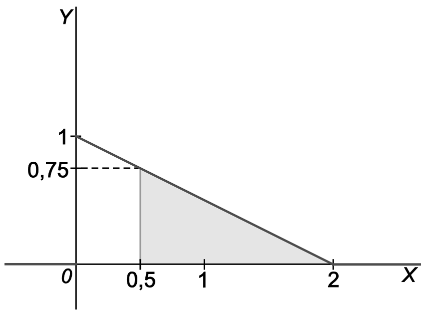


b) Esta probabilidad se puede calcular gráficamente como el área del triángulo señalado en la figura.

$$P(X>0{,}5)=\frac{1{,}5\cdot 0{,}75}{2}=0{,}5625$$

O también por cálculo integral

$$P(X>1)=\int_{0'5}^{2}\frac{1}{2}(2-x)dx=\frac{1}{2}\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{0,5}^{2}=\frac{1}{2}(4-2-1+0{,}125)=0{,}5625$$



c) Para calcular la esperanza, se procede del siguiente modo:

$$E[X]=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x\frac{2-x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(4-\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

Para calcular la varianza debe calcularse antes:

$$E\left[X^2\right]=\int_0^2 x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\frac{2-x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right)=\frac{2}{3}$$

La varianza es $\text{Var}(X)=E\left[X^2\right]-E[X]^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$.

48. Considera una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x} & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$**.**

a) Calcula el valor de la constate *k*.

b) Dibuja la gráfica de la función de densidad.

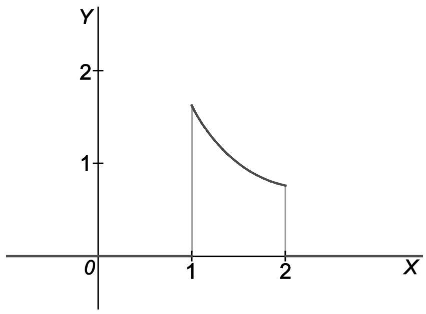
c) Calcula su esperanza y su varianza.

a) El área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje *X* y las rectas verticales $x=1$ y $x=2$ debe ser 1:

$$1=\int_1^2 \frac{k}{x}dx = k\left[\ln x\right]_1^2 = k(\ln 2-\ln 1) = k\cdot \ln 2 \Rightarrow k=\frac{1}{\ln 2}$$

b) La función de densidad y su gráfica son:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x\ln 2} & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



c) La esperanza de la variable *X* es $E\left[X\right]=\int_1^2 x\frac{1}{x\ln 2}dx=\frac{1}{\ln 2}\left[x\right]_1^2=\frac{1}{\ln 2}=1{,}4427$.

Para calcular la varianza debe calculase antes:

$$E\left[X^2\right]=\int_1^2 x^2\frac{1}{x\ln 2}dx=\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{1}{\ln 2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=2{,}1640$$

La varianza es $\text{Var}(X)=E\left[X^2\right]-E\left[X\right]^2=2{,}1640-1{,}4427^2=0{,}0826$.

Variables aleatorias con distribución normal

49. Sea una variable aleatoria que sigue una distribución *N*(0, 1), halla el valor de *k* en cada caso.

a) $P(Z\le k)=0{,}9846$

b) $P(Z\ge k)=0{,}33$

c) $P(Z>k)=0{,}8413$

d) $P(-k<Z<k)=0{,}7498$

a) $\Phi(k)=P(Z\le k)=0{,}9846 \Rightarrow k=2{,}16$

b) $P(Z\ge k)=0{,}33 \Rightarrow 1-P(Z\le k)=0{,}33 \Rightarrow \Phi(k)=P(Z\le k)=0{,}67 \Rightarrow k=0{,}44$

c) $P(Z>k)=0{,}8413 \Rightarrow \Phi(-k)=P(Z<-k)=0{,}8413 \Rightarrow -k=1 \Rightarrow k=-1$

d) $P(-k<Z<k)=P(Z<k)-P(Z<-k)=P(Z<k)-\left(1-P(Z<k)\right)=2P(Z<k)-1$

Por tanto, $2\Phi(k)-1=0{,}7498 \Rightarrow \Phi(k)=0{,}8749 \Rightarrow k=1{,}15$

50. Sea una variable aleatoria que sigue una distribución normal $N(\mu = 3, \sigma = 0{,}8)$, halla el valor de *a* en cada caso.

a) $P(X \leq 2a) = 0{,}5$

b) $P(X \geq a - 1) = 0{,}1056$

c) $P\left(X > \frac{a}{2}\right) = 0{,}9991$

d) $P(3 - a < X < 3 + a) = 0{,}7888$

En todos los casos, debe tipificarse la variable para poder utilizar la tabla de la normal $N(0,1)$.

a) $P(X \leq 2a) = P\left(Z \leq \frac{2a-3}{0{,}8}\right) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{2a-3}{0{,}8} = 0 \Rightarrow a = 1{,}5$

b) $P(X \geq a-1) = P\left(Z \geq \frac{a-1-3}{0{,}8}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-4}{0{,}8}\right) = 0{,}1056$

Entonces, resulta $\Phi\left(\frac{a-4}{0{,}8}\right) = P\left(Z < \frac{a-4}{0{,}8}\right) = 0{,}8944 \Rightarrow \frac{a-4}{0{,}8} = 1{,}25 \Rightarrow a = 5$.

c) $P\left(X > \frac{a}{2}\right) = P\left(Z > \frac{\frac{a}{2} - 3}{0{,}8}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-6}{1{,}6}\right)$

Entonces $1 - P\left(Z < \frac{a-6}{1{,}6}\right) = 0{,}9991 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a-6}{1{,}6}\right) = P\left(Z < \frac{a-6}{1{,}6}\right) = 0{,}0009 \Rightarrow \Phi\left(-\frac{a-6}{1{,}6}\right) = 0{,}9991$

De donde $\frac{a-6}{1{,}6} = 3{,}12 \Rightarrow a = 10{,}992$

d) $P(3 - a < X < 3 + a) = P\left(\frac{3-a-3}{0{,}8} < Z < \frac{3+a-3}{0{,}8}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{0{,}8}\right) - 1$

Entonces $2\Phi\left(\frac{a}{0{,}8}\right) - 1 = 0{,}7888 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a}{0{,}8}\right) = 0{,}8944 \Rightarrow \frac{a}{0{,}8} = 1{,}25 \Rightarrow a = 1$

Síntesis

51. Sea *X* una variable aleatoria con distribución normal de media 5 y desviación típica 2. Calcula las probabilidades siguientes.

a) $P(X<3)$ **c)** $P(-2\le X-4<2)$ **e)** $P(1\le X<9)$

b) $P(X>2)$ **d)** $P(|2X|\le 1)$ **f)** $P(X\le 2\mid X\ge 1)$

En todos los casos, se tipifica previamente para poder usar las tablas de la normal estándar.

a) $P(X<3)=P\left(Z<\dfrac{3-5}{2}\right)=P(Z<-1)=1-\Phi(1)=1-0{,}8413=0{,}1587$

b) $P(X>2)=P\left(Z>\dfrac{2-5}{2}\right)=P(Z>-1{,}5)=\Phi(1{,}5)=0{,}9332$

c) $P(-2\le X-4<2)=P(2\le X<6)=P\left(\dfrac{2-5}{2}\le Z<\dfrac{6-5}{2}\right)=P(-1{,}5\le Z<0{,}5)=\Phi(0{,}5)-\Phi(-1{,}5)=$
$=\Phi(0{,}5)-1+\Phi(1{,}5)=0{,}6915-1+0{,}9332=0{,}6247$

d) $P(|2X|\le 1)=P(-1\le 2X\le 1)=P(-0{,}5\le X\le 0{,}5)=P\left(\dfrac{-0{,}5-5}{2}\le Z\le\dfrac{0{,}5-5}{2}\right)=P(-2{,}75\le Z\le -2{,}25)=$
$=\Phi(-2{,}25)-\Phi(-2{,}75)=1-\Phi(2{,}25)-1+\Phi(2{,}75)=1-0{,}9878-1+0{,}9970=0{,}0092$

e) $P(1\le X<9)=P\left(\dfrac{1-5}{2}\le Z<\dfrac{9-5}{2}\right)=P(-2\le Z<2)=2\Phi(2)-1=2\cdot 0{,}97725-1=0{,}9545$

f) Se pide una probabilidad condicionada, entonces:

$$P(X\le 2\mid X\ge 1)=\frac{P(X\le 2\cap X\ge 1)}{P(X\ge 1)}=\frac{P(1\le X\le 2)}{P(X\ge 1)}$$

Calculando numerador y denominador, por separado, resulta:

$$P(1\le X\le 2)=P\left(\frac{1-5}{2}\le Z\le\frac{2-5}{2}\right)=P(-2\le Z\le -1{,}5)=\Phi(-1{,}5)-\Phi(-2)=\Phi(2)-\Phi(1{,}5)=0{,}9772-0{,}9332=0{,}044$$

$$P(X\ge 1)=P\left(Z>\frac{1-5}{2}\right)=P(Z>-2)=\Phi(2)=0{,}9772$$

Luego $P(X\le 2\mid X\ge 1)=\dfrac{0{,}044}{0{,}9772}=0{,}0450$

52. El tiempo en minutos transcurrido hasta que una persona es atendida en la sucursal *A* de un banco sigue una distribución $N(\mu = 9, \sigma = 0{,}1)$, mientras que el tiempo, también en minutos, transcurrido hasta que es atendido en la sucursal *B* sigue una distribución $N(\mu = 8{,}5; \sigma = 2)$.

a) Si un cliente tiene que hacer una gestión y solo dispone de 10 minutos, ¿en qué sucursal será más fácil que le hayan atendido en el tiempo que dispone?

b) Un cliente, teniendo en cuenta la proximidad de estas dos sucursales a su casa, elige ir a la sucursal *A* con probabilidad 0,3, y a la sucursal *B,* con probabilidad 0,7. Eligiendo una de las visitas al banco de este cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el cliente haya tenido que esperar más de 10 minutos?

Considera las variables *X*: "tiempo de espera en la sucursal *A*" e *Y*: "tiempo de espera en la sucursal *B*". La variable *X* sigue una distribución $X \sim N(\mu = 9; \sigma = 0{,}1)$ y la variable *Y* $Y \sim N(\mu = 8{,}5; \sigma = 2)$.

a) La probabilidad de que sea atendido en la sucursal A, en los 10 minutos de que dispone es:

$$P(X \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-9}{0{,}1}\right) = \Phi(10) = 1$$

Mientras que la probabilidad de que sea atendido en la sucursal *B* en los 10 minutos disponibles es:

$$P(Y \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-8{,}5}{2}\right) = \Phi(0{,}75) = 0{,}7734$$

Luego, en los 10 minutos disponibles, es más probable que le hayan atendido en la sucursal *A* que en la *B*.

b) Considera los sucesos *A* = "el cliente elige la sucursal A" y *B* = "el cliente elige la sucursal B". Las probabilidades son $P(A) = 0{,}3$ y $P(B) = 0{,}7$.

Sea *T* = "tiempo de espera del cliente hasta ser atendido" (observa que $T = X$, si elige la sucursal *A* y $T = Y$ si elige la sucursal *B*)

Si el cliente elige la sucursal *A*, la probabilidad de que tarden más de 10 minutos en atenderle es:

$$P(T \ge 10 \mid A) = 1 - P(T \le 10 \mid A) = 1 - 1 = 0$$

Si el cliente elige la sucursal *B*, la probabilidad de que tarden más de 10 minutos en atenderle es:

$$P(T \ge 10 \mid B) = 1 - P(T \le 10 \mid B) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$$

Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(T \ge 10) = P(A)P(X \ge 10 \mid A) + P(B)P(Y \ge 10 \mid B) = 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}7 \cdot 0{,}2266 = 0{,}15862$$

CUESTIONES

53. Sean las variables aleatorias $X \sim \text{Bin}(n;p)$ e $Y \sim \text{Bin}\left(2n,\dfrac{p}{2}\right)$.

a) Comprueba que tienen la misma media.

b) ¿Cuál de las dos distribuciones tiene los datos menos dispersos respecto a su media?

a) $E[X]=n\cdot p$ y $E[Y]=2n\cdot\dfrac{p}{2}=n\cdot p$

Luego tienen la misma media o esperanza.

b) Para ver cuál de las dos variables tiene los datos menos dispersos, se debe calcular la varianza de ambas variables y compararlas. Se supone que $p\neq 0$ y $p\neq 1$.

$$\text{Var}(X)=n\cdot p\cdot(1-p) \text{ y } \text{Var}(Y)=2n\cdot\frac{p}{2}\cdot\left(1-\frac{p}{2}\right)=n\cdot p\cdot\left(1-\frac{p}{2}\right)$$

Como $1-p<1-\dfrac{p}{2} \Rightarrow \text{Var}(X)<\text{Var}(Y)$ la variable *X* tiene los valores menos dispersos que la variable *Y*.

54. Sea *X* una variable aleatoria que tiene una distribución continua. ¿Cuál es la media y la varianza de la distribución 2*X*? ¿Y la de $X+2$?

Sea $f(x)$ la función de densidad de la variable *X*, entonces, la esperanza de 2*X*, es:

$$E[2X]=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}xdx=2E[X]$$

Para la varianza de 2*X*, se debe calcular antes $E\left[(2X)^2\right]$. Pero, teniendo en cuenta que $E[kg(X)]=kE[g(X)]$ entonces $E\left[(2X)^2\right]=E\left[4X^2\right]=4E\left[X^2\right]$.

Y, por tanto, la varianza de 2*X* es:

$$\text{Var}(2X)=E\left[(2X)^2\right]-\left(E[2X]\right)^2=E\left[4X^2\right]-\left(2E[X]\right)^2=4\left(E\left[X^2\right]-E[X]^2\right)=4\,\text{Var}(X)$$

Luego, la esperanza de 2*X* es el doble que la esperanza de *X* y la varianza de 2*X* es cuatro veces la varianza de *X*"

En cuanto a la esperanza y la varianza de $X+2$, se tiene que $E[X+2]=E[X]+2$ y $\text{Var}(X+2)=\text{Var}(X)$.

PROBLEMAS

55. Sea X la variable aleatoria que consiste en sumar las puntuaciones obtenidas al lanzar conjuntamente un dado y una moneda equilibrados. Las puntuaciones que se consideran de la moneda son 0 para cara y 1 para cruz.

a) Escribe su función de masa de probabilidad y dibuja su gráfica.

b) Calcula la probabilidad de que la variable X tome como valor un número primo.

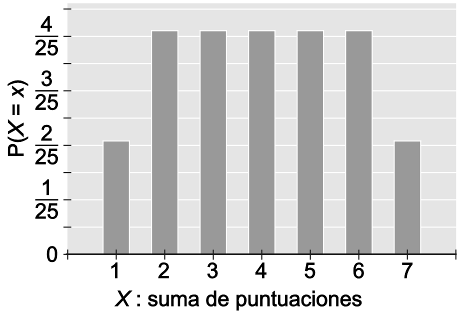
c) Calcula la esperanza y la varianza de X.

a) En el lanzamiento conjunto de una moneda y un dado, el espacio muestral está formado por los siguientes resultados equiprobables $E=\{1C,2C,3C,4C,5C,6C,1X,2X,3X,4X,5X,6X\}$ y al ser sumados, con $C=0$ y $X=1$ resulta que la variable aleatoria X: "suma de las puntuaciones del dado y la moneda" toma los valores enteros del 1 al 7, con las probabilidades que se muestran en la tabla siguiente:

$\boldsymbol{X}$	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{P(X=x)}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Donde, por ejemplo $P(X=2)=P(2C)+P(1X)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

Su gráfica se puede representar mediante un diagrama de barras:



b) La probabilidad de que la suma sea un número primo (3, 5 o 7), se obtiene sumando las probabilidades de individuales de 3, 5 y 7.

$P(X=\text{número primo})=P(3)+P(5)+P(7)==\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

c) Para calcular la esperanza y la varianza de la variable X, se construye la tabla siguiente:

$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{P(X=x)}$	$\boldsymbol{xP(X=x)}$	$\boldsymbol{x^2P(X=x)}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1	6
7	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{49}{12}$
	1	4	$\frac{115}{6}$

La esperanza es $E[X]=\sum_{j=1}^{7}x_j p_j=4$.

La varianza es $E[X^2]=\sum_{j=1}^{7}x_j^2 p_j=\frac{115}{6}\Rightarrow \text{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=\frac{115}{6}-4^2=\frac{19}{6}$.

56. De una urna que contiene 4 bolas verdes y 6 rojas se extraen sucesivamente y con reemplazamiento 6 bolas. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente 3 bolas verdes.

b) Más de 4 bolas verdes.

c) Más de 2 pero menos de 5 bolas verdes.

Cada extracción puede considerarse como un ensayo de Bernoulli en el que la probabilidad del suceso A = "obtener bola verde" es $p(A) = 0,4$.

Considera la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes extraídas en los 6 intentos". La distribución de la variable *X* es $\text{Bin}(n = 6; p = 0,4)$. Las probabilidades que se piden se pueden obtener directamente de la tabla de la binomial.

a) $P(X = 3) = 0,2765$

b) $P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) = 0,0369 + 0,0041 = 0,041$

c) $P(2 < X < 5) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,2765 + 0,1382 = 0,4147$

57. El encargado de una plantación de chopos asegura que, en este momento, el diámetro de los árboles sigue una distribución normal de media 20 cm y que el 90 % de ellos tiene un diámetro inferior a 25 cm.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Calcula la probabilidad de que un árbol elegido al azar tenga más de 22 cm de diámetro.

Sea *X*: "diámetro, en cm, de los árboles de la plantación". Se sabe que *X* sigue una distribución $N(\mu = 20; \sigma)$.

a) Como $P(X < 25) = 0,9$, entonces, tipificando y buscando en las tablas de la normal:

$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{25-20}{\sigma}\right) = 0,9 \Rightarrow \frac{5}{\sigma} = 1,282 \Rightarrow \sigma = 3,9\text{cm}$$

b) Con la desviación típica calculada en el apartado anterior:

$$P(X > 22) = P\left(Z > \frac{22-20}{3,9}\right) = P(Z > 0,51) = 1 - \Phi(0,51) = 1 - 0,6950 = 0,3050$$

58. Un test específico para determinar el estado de salud de los trabajadores de una empresa tiene una distribución normal de media $\mu = 100$ y desviación típica $\sigma = 8$. El protocolo de la revisión establece que si un trabajador supera los 115 puntos debe ser objeto de una segunda revisión en profundidad.

¿Cuál es el porcentaje de trabajadores que necesitará una segunda revisión?

Sea *X*: "puntuación del test de salud de los trabajadores", con distribución $N(\mu = 100, \sigma = 8)$.

Para estimar el porcentaje de trabajadores que necesitará una segunda revisión, debe calcularse:

$$P(X > 115) = P\left(Z > \frac{115-100}{8}\right) = P(Z > 1,875) = 1 - \Phi(1,875) = 1 - 0,9696 = 0,0304$$

Luego, se estima que alrededor del 3 % de los trabajadores necesitará una segunda revisión.

59. **La edad de los trabajadores de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 44 años y desviación típica 8,2 años.**

Si al 10 % de los trabajadores con más edad se les va a reducir la jornada laboral, ¿cuántos años tiene el menor trabajador afectado por esta medida?

Se considera la variable X: "edad de los trabajadores". Su distribución es $X \sim N(\mu = 44; \sigma = 8,2)$.

Sea a la edad del menor de los trabajadores afectados por la reducción de la jornada laboral, se tiene que $P(X > a) = 0,1$.

Entonces, buscando la función de distribución de X y tipificando:

$$1 - P(X < a) = 0,1 \Rightarrow P(X < a) = 0,9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-44}{8,2}\right) = 0,9$$

Y, de las tablas de la distribución normal estándar, se tiene que $\frac{a-44}{8,2} = 1,282 \Rightarrow a = 54,5$ años

60. **El 70 % de los habitantes de una localidad se oponen a que en su municipio se construya un cementerio nuclear.**

a) Si se escoge una muestra de 50 personas, calcula la esperanza y la desviación típica de la variable X: "número de personas que se oponen a la construcción del cementerio nuclear".

b) Si la muestra es de 100 personas, calcula la probabilidad de que más de 80 se opongan al proyecto.

a) Sea la variable aleatoria X: "número de personas, de las 50, que se opone a la construcción del cementerio nuclear". La variable aleatoria es $X \sim \text{Bin}(n = 50; p = 0,7)$, cuya esperanza y varianza son, respectivamente, $E[X] = n \cdot p = 50 \cdot 0,7 = 35$ y $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 50 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 10,5$.

b) En este caso, la variable Y: "número de personas, de las 100, que se opone a la construcción del cementerio nuclear" tiene una distribución $Y \sim \text{Bin}(n = 100, p = 0,7)$.

Como $E[Y] = 100 \cdot 0,7 = 70$ y $\text{Var}(Y) = 100 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 21$:

La distribución de Y se puede aproximar por una variable $T \sim N(\mu = 70; \sigma^2 = 21)$.

Entonces, aproximado por la normal y tipificando:

$$P(Y > 80) \simeq P(T > 80,5) = P\left(Z > \frac{80,5 - 70}{\sqrt{21}}\right) = P(Z > 2,29) = 1 - \Phi(2,29) = 1 - 0,9890 = 0,0109$$

61. **Una fábrica de azúcar envasa el producto en paquetes de un kilo. En un control de calidad se han pesado, con una báscula de precisión, 100 paquetes y se ha obtenido que la media es 1000,8 g con una desviación típica de 16,18 g.**

Suponiendo que la cantidad de azúcar envasada sigue una distribución normal, y que no son admisibles paquetes con menos de 980 g o más de 1020 g, calcula el porcentaje de paquetes que deben ser desechados.

Sea la variable aleatoria X: "cantidad envasada en cada paquete, en gramos". Su distribución es $N(\mu = 1000,8; \sigma = 16,18)$.

Se calcula la probabilidad de que un paquete elegido al azar sea aceptado; es decir, que su peso esté comprendido entre 980 y 1020 gramos:

$$P(980 < X < 1020) = P\left(\frac{980 - 1000,8}{16,18} < Z < \frac{1020 - 1000,8}{16,18}\right) = P(-1,29 < z < 1,19) =$$
$$= \Phi(1,19) - 1 + \Phi(1,29) = 0,8830 - 1 + 0,9015 = 0,7845$$

De manera que el 78,45 % de los paquetes serán aceptados y, por tanto 21,55 % serán desechados.

62. Antes de poner a la venta un nuevo fármaco, se realizan cuatro controles de calidad independientes. En cada control, si el fármaco es defectuoso se detecta en el 95 % de los casos. Calcula la probabilidad de que un fármaco en malas condiciones:

a) Sea detectado en uno solo de los cuatro controles.

b) Se detecte en al menos dos de los controles.

c) No sea puesto a la venta.

Se considera la variable *X*: "número de controles, de los 4, en los que se detecta que el fármaco está en malas condiciones". La distribución es $X \sim \text{Bin}(n=4; p=0{,}95)$. Las probabilidades se obtienen de la tabla de la $Y \sim \text{Bin}(n=4; p=0{,}05)$.

a) $P(X=1)=P(Y=3)=0{,}0005$

b) $P(X\geq 2)=P(Y\leq 2)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)=0{,}8145+0{,}1715+0{,}0135=0{,}9995$

c) El fármaco será puesto a la venta solo si en ninguno de los controles se detecta que está en malas condiciones. Esto es, si $X=0$. De esta manera:

$P(X=0)=P(Y=4)=0$

De modo que con este sistema de control, un fármaco en malas condiciones no será puesto a la venta.

63. Un tribunal debe calificar a los 700 aspirantes para cubrir 25 vacantes en un organismo oficial. Si las calificaciones son de 0 a 10 y su distribución es normal de media μ = 5,7 puntos y desviación típica σ = 1,5 puntos, se pide:

a) ¿Cuántos opositores han obtenido puntuación superior o igual a 5 puntos?

b) ¿Cuál es la nota de corte para ser seleccionado?

Sea la variable aleatoria *X*: "calificación de las pruebas". Se tiene que $X \sim N(\mu=5{,}7; \sigma=1{,}5)$. Entonces:

a) Se calcula la probabilidad de que un opositor elegido al azar obtenga calificación igual o superior a 5:

$$P(X\geq 5)=P\left(Z\geq \frac{5-5{,}7}{1{,}5}\right)=P(Z\geq -0{,}47)=\Phi(0{,}47)=0{,}6808$$

Esto es, el 68,08 % de los opositores ha obtenido puntuación superior o igual 5 y, por tanto, $700\cdot 0{,}6808=476{,}56$, es decir unos 477 opositores han obtenido nota superior o igual a 5.

b) Para obtener la nota de corte, que llamamos c, debe tenerse en cuenta que 675 opositores no obtendrán plaza, lo que supone el 96,43 % de los 700 aspirantes. Luego debe plantearse:

$$P(X<c)=0{,}9643 \Rightarrow P\left(Z<\frac{c-5{,}7}{1{,}5}\right)=0{,}9643 \Rightarrow \frac{c-5{,}7}{1{,}5}=1{,}802 \Rightarrow c=8{,}403$$

64. Si un dado equilibrado se lanza 600 veces, calcula la probabilidad de obtener:

a) Al menos 350 veces un número par.

b) Más de 120 veces un 6 (máxima puntuación).

a) Sea la variable *X*: "Número de veces, de las 600, que se obtiene número par". $X \sim \text{Bin}(n = 600; p = 0{,}5)$, que dado que *n* es suficientemente grande, se puede aproximar por $W \sim N(\mu = 300,\ \sigma^2 = 150)$, ya que:

$\mu = E[X] = 600 \cdot 0{,}5 = 300$ y $\sigma^2 = \text{Var}(X) = 600 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 150$

De forma que, aproximando por la normal y tipificando:

$$P(X \geq 350) \cong P(W \geq 349{,}5) = P\left(Z \geq \frac{349{,}5 - 300}{\sqrt{150}}\right) = P(Z \geq 4{,}04) = 1 - \Phi(4{,}04) = 1 - 1 = 0$$

b) Se considera *Y*: "Número de veces, de las 600, que se obtiene un 6". $Y \sim \text{Bin}\left(n = 600;\ p = \frac{1}{6}\right)$.

Cuya esperanza y varianza son $E[Y] = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ y $\text{Var}(Y) = 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{6} = 83{,}33$.

Luego, la distribución de la variable *Y* se puede aproximar por la de variable $V \sim N(\mu = 100; \sigma^2 = 83{,}33)$. Y, entonces:

$$P(Y > 120) \cong P(V \geq 120{,}5) = P\left(Z \geq \frac{120{,}5 - 100}{\sqrt{83{,}33}}\right) = P(Z \geq 2{,}25) = 1 - \Phi(2{,}25) = 1 - 0{,}9878 = 0{,}0122$$

65. La puntuación de un test homologado para determinar el cociente intelectual tiene una distribución normal de media μ = 110 puntos y desviación típica σ = 18. Si se elige una persona al azar para realizar el test, calcula:

a) La probabilidad de que obtenga una puntuación inferior a 100.

b) La probabilidad de que supere los 130 puntos si se sabe que en un test anterior superó los 115 puntos.

Sea *X*: "puntuación en el test" la variable aleatoria cuya distribución es $N(\mu = 110,\ \sigma = 18)$.

a) La probabilidad de que una persona elegida al azar no llegue a los 100 puntos es:

$$P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100 - 110}{18}\right) = P(Z < -0{,}56) = \Phi(-0{,}56) = 1 - \Phi(0{,}56) = 1 - 0{,}7123 = 0{,}2877$$

b) En este caso, se trata de calcular la probabilidad condicionada siguiente:

$$P(X > 130 \mid X > 115) = \frac{P(X > 130 \cap X > 115)}{P(X > 115)} = \frac{P(X > 130)}{P(X > 115)} = \frac{0{,}1335}{0{,}3897} = 0{,}3426$$

donde:

$$P(X > 130) = P\left(Z > \frac{130 - 110}{18}\right) = P(Z > 1{,}11) = 1 - \Phi(1{,}11) = 1 - 0{,}8665 = 0{,}1335$$

$$P(X > 115) = P\left(Z > \frac{115 - 110}{18}\right) = P(Z > 0{,}28) = 1 - \Phi(0{,}28) = 1 - 0{,}6103 = 0{,}3897$$

66. Según los datos del organismo correspondiente, el 80 % de los incendios que se producen en la época de calor son provocados. Si este verano se han producido 150 incendios en una determinada región, calcula la probabilidad de que:

a) Más de 100 hayan sido provocados.

b) Como mucho 30 hayan sido accidentales.

c) El número de incendios provocados supere el 80 % del total de incendios.

Se considera la variable aleatoria X: "número de incendios provocados, de los 150 producidos". X sigue una distribución binomial $\text{Bin}(n = 150,\ p = 0{,}8)$.

La esperanza y la varianza de X son $E[X] = 150 \cdot 0{,}8 = 120$ y $\sigma^2 = \text{Var}(X) = 150 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 24$ que se puede aproximar por la distribución de una variable $Y \sim N(\mu = 120; \sigma^2 = 24)$. Entonces:

a) La probabilidad de que más de 100 incendios sea provocados es:

$$P(X > 100) \cong P(Y \geq 100{,}5) = P\left(Z \geq \frac{100{,}5 - 120}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \geq -3{,}98) = \Phi(3{,}98) = 1$$

b) Que como mucho 30 sean accidentales equivale a que al menos 120 sean intencionados.

$$P(X \geq 120) \cong P(Y \geq 119{,}5) = P\left(Z \geq \frac{119{,}5 - 120}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \geq -0{,}10) = \Phi(0{,}10) = 0{,}5398$$

c) En este caso se pide que el número de incendios provocados supere el 80 % del total de incendios, es decir, supero los 120 incendios.

$$P(X > 120) \cong P(Y \geq 120{,}5) = P\left(Z \geq \frac{120{,}5 - 120}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \geq 0{,}1) = 1 - \Phi(0{,}1) = 1 - 0{,}5398 = 0{,}4602$$

67. En un centro educativo, a pesar de los controles rigurosos, un 12 % de los ordenadores resulta infectado por algún tipo de virus informático.

a) Si en un aula hay 10 ordenadores, calcula la probabilidad de que más de un ordenador tenga virus.

b) Si se quiere que la probabilidad de que haya, como máximo, dos ordenadores infectados sea al menos 0,7 ¿cuál tiene que ser el número máximo de ordenadores en el aula?

c) Si en todo el centro el número de ordenadores es 150, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos el 10 % de ellos tenga virus?

a) Sea *X*: "número de ordenadores infectados, de los 10". La variable $X \sim \text{Bin}(n = 10; p = 0{,}12)$, entonces:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - (0{,}2785 + 0{,}3798) = 0{,}3417$$

donde:

$$P(X = 0) = 0{,}88^{10} = 0{,}2785 \text{ y } P(X = 1) = \binom{10}{1} 0{,}12 \cdot 0{,}88^9 = 0{,}3798$$

b) En este caso, se trata de calcular el mayor valor de *n*, en la distribución binomial para que $P(X \leq 2) \geq 0{,}7$

Para ello se necesitan las probabilidades:

$$P(X = 0) = 0{,}88^n,\ P(X = 1) = n \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88^{n-1} \text{ y } P(X = 2) = \frac{n(n-1)}{2} 0{,}12^2 0{,}88^{n-2}$$

De modo que $P(X \leq 2) = 0{,}88^n + n \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^{n-2}$

Se construye la tabla siguiente, con las probabilidades necesarias para obtener $P(X \leq 2)$:

n	***P*(*X* = 0)**	***P*(*X* = 1)**	***P*(*X* = 2)**	$P(X \leq 2)$
14	0,16702	0,31885	0,28262	0,76848
15	0,14697	0,30063	0,28696	0,73457
16	0,12934	0,28219	0,28860	0,70013
17	0,11382	0,26385	0,28783	0,66550
18	0,10016	0,24584	0,28496	0,63096

Es decir, como máximo debe haber 16 ordenadores en el aula.

c) Ahora la variable *Y*: "número de ordenadores infectados, de los 150" es $Y \sim \text{Bin}(n = 150; p = 0{,}12)$.

La esperanza y la varianza de *Y* son $E[Y] = 150 \cdot 0{,}12 = 18$ y $\text{Var}(X) = 150 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88 = 15{,}84$.

De modo que la distribución de *Y* se puede aproximar por la de la variable $T \sim N(\mu = 18; \sigma^2 = 15{,}84)$. Entonces, como el 10 % de 150 es 15, se tiene que:

$$P(Y \geq 15) \cong P(T \geq 14{,}5) = P\left(Z \geq \frac{14{,}5 - 18}{\sqrt{15{,}84}}\right) = P(Z \geq -0{,}88) = \Phi(0{,}88) = 0{,}8106$$

68. Un sistema eléctrico está formado por 6 componentes independientes. La probabilidad de que falle uno cualquiera de los componentes es 0,15. Calcula la probabilidad de que:

a) Fallen al menos dos componentes.

b) Fallen al menos dos componentes si se sabe que ya ha fallado al menos uno.

c) Ningún componente falle.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de componentes que fallan de las 6".

La distribución de *X* es $\text{Bin}(n=6; p=0{,}15)$. Las probabilidades pueden obtenerse de la tabla de la binomial:

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - (0{,}3771 + 0{,}3993) = 0{,}2236$

b) En este caso se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{0{,}2236}{0{,}6229} = 0{,}3590$$

donde $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}3771 = 0{,}6229$

c) En este caso $P(X = 0) = 0{,}3771$

69. El tiempo que dura el proceso de montaje final de un artículo es una variable aleatoria con distribución normal *N*(μ, σ). Si el 30 % de los artículos se monta en menos de 2 horas y en el 5 % se tarda más de 2 horas y media, calcula:

a) La media y la varianza de la distribución.

b) El porcentaje de artículos que se monta en menos de una hora y media.

Sea la variable aleatoria *X*: "duración del proceso del montaje del artículo, en horas". Se tiene que $X \sim N(\mu, \sigma)$, ambos parámetros desconocidos.

Se sabe que $P(X < 2) = 0{,}3$ y $P(X > 2{,}5) = 0{,}05$.

a) Tipificando la variable y aproximando con las tablas de la $N(0,1)$, se tiene:

$$P(X < 2) = 0{,}3 \Rightarrow P\left(Z < \frac{2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}3 \Rightarrow \frac{2-\mu}{\sigma} = -0{,}525$$

$$P(X > 2{,}5) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{2{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05 \Rightarrow \frac{2{,}5-\mu}{\sigma} = 1{,}645$$

Que conduce a resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} \mu - 0{,}525\sigma = 2 \\ \mu + 1{,}645\sigma = 2{,}5 \end{cases}$$

Cuya solución es $\mu = 2{,}121$ y $\sigma = 0{,}2304$.

b) La probabilidad de que un artículo elegido al azar se monte en menos de una hora y media es:

$$P(X < 1{,}5) = P\left(Z < \frac{1{,}5 - 2{,}121}{0{,}2304}\right) = P(Z < -2{,}6953) = 1 - \Phi(2{,}7) = 1 - 0{,}9965 = 0{,}0035$$

Luego el porcentaje estimado de artículos que se monta en menos de una hora y media es del 0,35 %.

70. En la segunda vuelta de las elecciones presidenciales, el candidato *A* obtuvo el 52 % de los votos emitidos. El resto votó a otro candidato o lo hizo en blanco. Si de la población que ha participado en la votación se eligen al azar 2000 personas, calcula la probabilidad de que entre estos:

a) Más del 60 % haya votado al candidato *A*.

b) Menos de la mitad haya votado al candidato *A*.

c) Más del 60 % haya votado al candidato *A* si se sabe que por lo menos la mitad le votó.

Sea la variable aleatoria *X*: “número de personas, de las 2000, que han votado al candidato A”. La distribución de *X* es $\text{Bin}(n = 2000; p = 0{,}52)$.

La esperanza y la varianza de *X* son $E[X] = 2000 \cdot 0{,}52 = 1040$ y $\sigma^2 = 2000 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}48 = 499{,}2$.

De modo que, dado el elevado tamaño de la muestra, la distribución de *X* puede aproximarse por la distribución de la variable $W \sim N(\mu = 1040; \sigma^2 = 499{,}2)$.

a) $P(X > 1200) \cong P(W \geq 1200{,}5) = P\left(Z \geq \dfrac{1200{,}5 - 1040}{\sqrt{499{,}2}}\right) = P(Z \geq 7{,}18) = 1 - \Phi(7{,}18) = 1 - 1 = 0$

b) $P(X < 1000) \cong P(W < 999{,}5) = P\left(Z < \dfrac{999{,}5 - 1040}{\sqrt{499{,}2}}\right) = P(Z < -1{,}81) = 1 - \Phi(1{,}81) = 1 - 0{,}9649 = 0{,}0351$

c) La probabilidad de que al menos la mitad de las 2000 personas haya votado al candidato *A* es:

$$P(X > 1200 \mid X \geq 1000) = \frac{P(X > 1200)}{P(X \geq 1000)} = \frac{0}{0{,}9649} = 0$$

donde $P(X \geq 1000) = 1 - P(X < 1000) = 1 - 0{,}0351 = 0{,}9649$

71. La producción de trigo por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución *N*(μ, σ). Los datos históricos indican que solo en el 10 % de los años la producción supera los 4000 kg/ha, mientras que en el 60 % de los años queda por debajo de los 3200 kg/ha.

a) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

b) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 3500 kg/ha en un año elegido al azar.

Se considera la variable aleatoria *X*: “producción de trigo por hectárea” en la comarca. La variable *X* sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

Se sabe que $P(X > 4000) = 0{,}1$ y que $P(X < 3200) = 0{,}6$.

a) Con la información disponible se tiene que:

$$P(X > 4000) = 0{,}1 \Rightarrow P\left(Z > \frac{4000 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{4000 - \mu}{\sigma} = 1{,}281$$

$$P(X < 3200) = 0{,}6 \Rightarrow P\left(Z < \frac{3200 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}6 \Rightarrow \frac{3200 - \mu}{\sigma} = 0{,}253$$

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas queda:

$$\begin{cases} \mu + 1{,}281\sigma = 4000 \\ \mu + 0{,}253\sigma = 3200 \end{cases}$$

Cuya solución es $\mu = 3003{,}11$ y $\sigma = 778{,}21$ kilogramos por hectárea.

b) Con los parámetros calculados en el apartado a, se tiene que:

$$P(X > 3500) = P\left(Z > \frac{3500 - 3003{,}11}{778{,}21}\right) = P(Z > 0{,}64) = 1 - \Phi(0{,}64) = 1 - 0{,}7389 = 0{,}2611$$

72. Una empresa fabrica minas de grafito para portaminas cuya longitud sigue una distribución *N*(μ = 30, σ = 0,5) en milímetros. Solo se aceptan las minas si su largo está entre 29 y 31 mm. Si un control de calidad selecciona al azar 1000 minas, calcula la probabilidad de que sean aceptadas más de 950 minas.

La variable aleatoria *X*: "longitud de las minas de grafito" tiene una distribución $N(\mu = 30; \sigma = 0{,}5)$, en mm.

Elegida al azar una mina de grafito, la probabilidad de que sea aceptada es:

$$P(29 \le X \le 31) = P\left(\frac{29-30}{0{,}5} \le Z \le \frac{31-30}{0{,}5}\right) = P(-2 \le Z \le 2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

Considera, ahora, la variable *Y*: "número de minas, de las 1000, que son aceptadas". La variable *Y* tiene una distribución $\text{Bin}(n = 1000; p = 0{,}9544)$, y, dado el tamaño de la muestra, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, aunque el valor de la *p* sea grande.

La variable $T \sim N(\mu = 1000 \cdot 0{,}9544 = 954{,}4; \sigma^2 = 1000 \cdot 0{,}9544 \cdot 0{,}0456 = 43{,}52)$. Entonces:

$$P(Y > 950) \cong P(T \ge 950{,}5) = P\left(Z \ge \frac{950{,}5 - 954{,}4}{\sqrt{43{,}52}}\right) = P(Z \ge -0{,}59) = \Phi(0{,}59) = 0{,}7224$$

PARA PROFUNDIZAR

73. En España la distribución de la población según su grupo sanguíneo se recoge en la tabla:

Tipo	Rh +	Rh -
O	36 %	9 %
A	34 %	8 %
B	8 %	2 %
AB	2,5 %	0,5 %

El grupo A- solo puede recibir sangre de personas con los grupos O- y A-, mientras que puede ser donante a personas de los grupos AB+, AB-, A+ y A-.

Un enfermo con el grupo sanguíneo A- precisa sangre para transfusión.

a) En el hospital se presentan 10 voluntarios aleatorios. Calcula la probabilidad de que al menos uno de los donantes sea compatible con el enfermo.

b) ¿Y si se presentan 50 voluntarios?

La probabilidad de que un donante elegido al azar, entre todos los posibles donantes, sea compatible para donar sangre al enfermo con grupo A- es $P(O-) + P(A-) = 0{,}09 + 0{,}08 = 0{,}17$.

a) Si se presentan 10 voluntarios (elegidos al azar), sea la variable aleatoria *X*: "número de personas, entre las 10, que pueden donar sangre al enfermo". La variable $X \sim \text{Bin}(n = 10; p = 0{,}17)$, luego:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}1552 = 0{,}8448$$

Donde $P(X = 0) = 0{,}83^{10} = 0{,}1552$

b) En el caso de presentarse 50 voluntarios (al azar), se considera la variable *Y*: "número de personas, de las 50, que pueden donar sangre al enfermo". La variable $Y \sim \text{Bin}(n = 50; p = 0{,}17)$.

Para calcular la probabilidad $P(Y \ge 1)$ se puede proceder de dos formas:

1.ª Forma. Directamente con la binomial:

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}00005993 = 0{,}99994007$$

Donde $P(Y = 0) = 0{,}83^{50} = 0{,}00005993$

2.ª Forma. Aproximando por una normal $T \sim N(\mu = 50 \cdot 0{,}17 = 8{,}5; \sigma^2 = 50 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83 = 7{,}055)$

$$P(Y \ge 1) \cong P(T \ge 0{,}5) = P\left(Z \ge \frac{0{,}5 - 8{,}5}{\sqrt{7{,}055}}\right) = P(Z \ge -3{,}01) = \Phi(3{,}01) = 0{,}9987$$

74. En una población el nivel de colesterol total en sangre sigue una distribución normal de media μ = 180 mg/dL y varianza $\sigma^2 = 225$. Se considera que los valores del nivel de colesterol mayores de 200 mg/dL son perjudiciales para la salud y que deben corregirse mediante un tratamiento.

a) Elegidas 200 personas al azar, ¿cuál es el número esperado de ellas que necesitarán tratamiento?

b) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su nivel de colesterol sea inferior a 170 mg/dL, si se sabe que no precisa tratamiento?

c) Si la varianza se mantiene en su actual valor, calcula qué valor medio debe tener el nivel de colesterol para que solo el 5 % de la población deba seguir tratamiento médico.

Sea la variable X: "nivel de colesterol en sangre", cuya distribución es $N(\mu = 180; \sigma^2 = 225)$.

a) La probabilidad de que una persona elegida al azar en esta población deba ponerse en tratamiento es:

$$P(X > 200) = P\left(Z > \frac{200 - 180}{\sqrt{225}}\right) = P(Z > 1{,}33) = 1 - \Phi(1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

Se considera la variable Y: "número de personas, de las 200, que deben iniciar tratamiento", que tiene una distribución $\text{Bin}(n = 200; p = 0{,}0918)$. Entonces:

El número esperado de las 200 personas que deben ponerse en tratamiento es $E[Y] = 200 \cdot 0{,}0918 = 18{,}36$

Aproximadamente 18 personas deben ponerse en tratamiento médico.

b) $P(X < 170 \mid X < 200) = \dfrac{P(X < 170)}{P(X < 200)} = \dfrac{0{,}2514}{0{,}9082} = 0{,}2768$

$$P(X < 170) = P\left(Z < \frac{170 - 180}{15}\right) = P(Z < -0{,}67) = 1 - \Phi(0{,}67) = 0{,}2514$$

c) Si la varianza sigue siendo $\sigma^2 = 225$; y el límite para iniciar tratamiento es de 200 mg/dL, el nivel medio de colesterol μ de la población debería ser:

$$P\left(Z > \frac{200 - \mu}{\sqrt{225}}\right) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{200 - \mu}{\sqrt{225}}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{200 - \mu}{\sqrt{225}} = 1{,}645 \Rightarrow \mu = 175{,}325 \text{ mg/dL}$$

75. En una central de producción lechera se sospecha que la máquina envasadora de las botellas de 1,2 L se ha desconfigurado y, por ese motivo, se lleva a cabo un control de calidad en el que se comprueba que la cantidad media de las botellas analizadas es de 1180 mL, con una desviación típica de 8 mL.

Las especificaciones de calidad señalan que solo serán admitidas para la venta botellas que contengan entre 1185mL y 1215 mL.

a) Calcula el porcentaje de botellas no admisibles que está produciendo la máquina envasadora.

b) Si la máquina envasadora se ajusta a una media de 1200 mL y se mantiene la desviación típica en 8 mL, ¿cuál es el porcentaje de botellas listas para su distribución?

c) Si la media se ajusta a 1200 mL, ¿cuál debería ser la desviación típica para que el 98 % de las botellas fuera admisible?

La variable aleatoria *X*: "volumen de llenado de las botellas de 1,2 litros" tiene una distribución de $N(\mu = 1180; \sigma = 8)$.

a) La probabilidad de que una botella elegida al azar sea admisible es:

$$P(1185 < X < 1215) = P\left(\frac{1185-1180}{8} < Z < \frac{1215-1180}{8}\right) = P(0{,}63 < Z < 4{,}38) =$$
$$= \Phi(4{,}38) - \Phi(0{,}63) = 1 - 0{,}7357 = 0{,}2643$$

De modo que la probabilidad de que una botella elegida al azar no sea admisible es 0,7357. Es decir, el 73,57 % de las botellas no es admisible y, en consecuencia se confirma la sospecha de que la máquina envasadora se ha desconfigurado.

b) Ahora, la distribución de *X* es $N(\mu = 1200; \sigma = 8)$, de manera que la probabilidad de que una botella elegida al azar sea admisible es:

$$P(1185 < X < 1215) = P\left(\frac{1185-1200}{8} < Z < \frac{1215-1200}{8}\right) = P(-1{,}88 < Z < 1{,}88) =$$
$$= 2\Phi(1{,}88) - 1 = 2 \cdot 0{,}9699 - 1 = 0{,}9399$$

Y, en consecuencia, el 94 % de las botellas es admisible para su distribución.

c) En este caso, la distribución de *X* es $N(\mu = 1200; \sigma)$, con σ desconocida y para que una botella elegida al azar sea admisible con probabilidad 0,98 debe ser:

$$P(1185 < X < 1215) = P\left(\frac{1185-1200}{\sigma} < Z < \frac{1215-1200}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-15}{\sigma} < Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}98$$

Luego $\Phi\left(\frac{15}{\sigma}\right) = \frac{1{,}98}{2} = 0{,}99 \Rightarrow \frac{15}{\sigma} = 2{,}33 \Rightarrow \sigma = 6{,}44$

Es decir, una vez reconfigurada la máquina de envasar, para incrementar el porcentaje de botellas con nivel admisible es necesario reducir la variabilidad del proceso de embotellado.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Si *X* es una variable aleatoria de media 15 y varianza 3,75 con una distribución $\mathrm{Bin}(n, p)$, calcula los valores de *n* y *p*.

La media y la varianza de la distribución binomial son, respectivamente, $E[X] = 15$ y $\mathrm{Var}(X) = 3{,}75$.

Entonces, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} n \cdot p = 15 \\ n \cdot p \cdot (1-p) = 3{,}75 \end{cases} \Rightarrow 15(1-p) = 3{,}75 \Rightarrow p = 0{,}75$$

De la primera ecuación se tiene que $n \cdot 0{,}75 = 15 \Rightarrow n = 20$.

2. **En una comunidad de vecinos, el 60 % de las veces que un vecino llega a su portal no encuentra el ascensor en la planta baja. Si se eligen 7 vecinos al azar, calcula la probabilidad de que:**

a) Exactamente 2 encuentren el ascensor en la planta baja.

b) Por lo menos 3 encuentren el ascensor en la planta baja.

Sea la variable aleatoria X: "número de vecinos, de los 7 elegidos, que se encuentra el ascensor en la planta baja". La distribución de X es $\text{Bin}(n=7; p=0,4)$. Las probabilidades se pueden calcular o buscar directamente en la tabla de la binomial.

a) La probabilidad de que exactamente 2 vecinos encuentre el ascensor es:

$$P(X=2)=\binom{7}{2}0,4^2\cdot 0,6^5=0,2613$$

b) La probabilidad de que por lo menos 3 encuentren el ascensor es:

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=1-0,0280-0,1306-0,2613=0,5801$$

Donde $P(X=2)$ se ha calculado en el apartado a y $P(X=0)$, $P(X=1)$ vienen dados por:

$$P(X=0)=0,6^7=0,0280\ ,\ P(X=1)=\binom{7}{1}0,4\cdot 0,6^6=0,1306$$

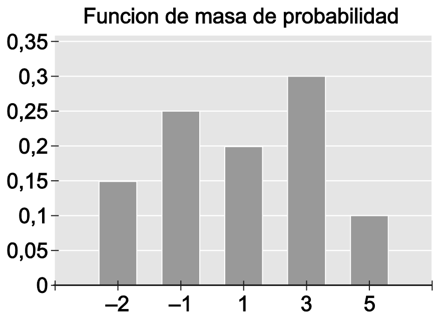
3. **Una variable aleatoria X toma los valores −2, −1, 1, 3 y 5 con probabilidades respectivas 0,15; 0,25; 0,2; 0,3 y 0,1.**

a) Representa gráficamente la distribución de probabilidad.

b) Calcula la esperanza y la varianza de X.

c) Halla $P(-1\leq X<4)$.

a) El diagrama de barras que representa la función de masa de probabilidad es:



b) La esperanza de X es $E[X]=-2\cdot 0,15-1\cdot 0,25+1\cdot 0,2+3\cdot 0,3+5\cdot 0,1=1,05$.

Para la obtener la varianza se debe calcular antes:

$$E[X^2]=(-2)^2\cdot 0,15+(-1)^2\cdot 0,25+1^2\cdot 0,2+3^2\cdot 0,3+5^2\cdot 0,1=6,25$$

La varianza es $\text{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=6,25-1,1025=5,1475$

c) $P(-1\leq X<4)=\text{P}(X=-1)+P(X=1)+P(X=3)=0,25+0,2+0,3=0,75$

4. Sea *X* una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} k(x+1) & \text{si} \quad 0\le x\le 4 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Calcula el valor de *k* y dibuja la gráfica de *f*(*x*).

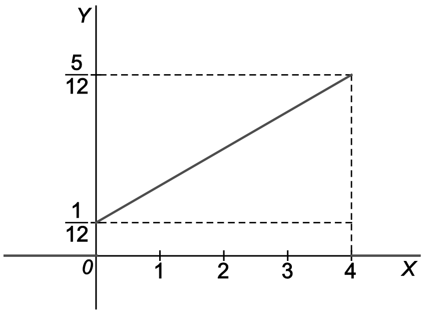
b) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

c) Halla la probabilidad de que la variable tome un valor superior a 2 sabiendo que ha tomado un valor comprendido entre 1 y 3.

a) Para calcular *k* se procede imponiendo que el área de la región limitada por la curva, el eje *OX* y las rectas verticales *x* = 0 y *x* = 4 sea 1. Es decir:

$$1=\int_0^4 k(x+1)dx=k\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^4=k(8+4)=12k \Rightarrow k=\frac{1}{12}$$

Y su gráfica:



b) La esperanza de *X* se obtiene de la siguiente manera:

$$E[X]=\int_0^4 \frac{1}{12}x(x+1)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{22}{9}$$

Para calcular la varianza se calcula primero $E\left[X^2\right]$:

$$E\left[X^2\right]=\int_0^4 \frac{1}{12}x^2(x+1)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{64}{9}$$

La varianza de *X* es $\text{Var}(X)=E\left[X^2\right]-E[X]^2=\frac{64}{9}-\left(\frac{22}{9}\right)^2=\frac{92}{81}$.

c) $P(2<X<3)=\int_2^3 \frac{1}{12}(x+1)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_2^3=\frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}-0\right]=\frac{1}{8}$

$$P(1<X<3)=\int_1^3 \frac{1}{12}(x+1)dx=\frac{1}{12}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$$P(X>2\,|\,1<X<3)=\frac{P(2<X<3)}{P(1<X<3)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{4}$$

5. La duración media de una determinada marca de electrodomésticos es de 10 años con una desviación típica de 0,7 años. Suponiendo que la duración sigue una distribución normal, calcula la probabilidad de que uno de tales electrodomésticos elegido al azar dure:

a) Más de 9 años.

b) Entre 9 y 11 años.

La variable aleatoria *X*: "vida de un electrodoméstico en años" tiene una distribución normal $N(\mu = 10; \sigma = 0,7)$.

a) $P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-10}{0,7}\right) = P(Z > -1,43) = \Phi(1,43) = 0,9236$

b) $P(9 \le X \le 11) = P\left(\frac{9-10}{0,7} \le Z \le \frac{11-10}{0,7}\right) = P(-1,43 \le Z \le 1,43) = 2\Phi(1,43) - 1 = 2 \cdot 0,9236 - 1 = 0,8472$

6. Las calificaciones obtenidas por los estudiantes para acceder a una facultad siguen una distribución $N(\mu = 9,8; \sigma = 1,5)$. Si la nota de corte se estableció en 11,5, ¿cuál es el porcentaje de estudiantes que no pudo acceder a la facultad ese año?

La variable aleatoria *X*: "calificaciones de los estudiantes" tiene una distribución $N(\mu = 9,8, \sigma = 1,5)$.

Si la nota de corte quedó en 11,5, entonces la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya superado el corte es:

$$P(X < 11,5) = P\left(Z < \frac{11,5 - 9,8}{1,5}\right) = P(Z < 1,13) = 0,8708$$

Esto es, el 87,08 % de los estudiantes presentados no superó el corte establecido.

7. En una población la estatura de los bebés al nacer sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. El 5 % de los bebés mide más de 52 cm al nacer y el 80 % mide menos de 48 cm.

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) Halla la probabilidad de que la estatura de un recién nacido esté comprendida entre 49,5 cm y 51 cm.

La variable *X*: "estatura de los bebés al nacer" tiene una distribución $N(\mu, \sigma)$, ambos parámetros desconocidos.

a) Las condiciones se plantean en forma de ecuaciones, de la siguiente manera.

El 5 % de los bebés mide más de 52 cm al nacer, se traduce en que:

$$P(X > 52) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{52-\mu}{\sigma}\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{52-\mu}{\sigma}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{52-\mu}{\sigma} = 1,645$$

El 80 % de los bebés mide menos de 48 cm al nacer, significa que:

$$P(X < 48) = 0,8 \Rightarrow P\left(Z < \frac{48-\mu}{\sigma}\right) = 0,8 \Rightarrow \frac{48-\mu}{\sigma} = 0,841$$

De forma que, para calcular los valores de μ y σ se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mu + 1,645\sigma = 52 \\ \mu + 0,841\sigma = 48 \end{cases}$$

Cuya solución es $\mu = 43,82$ y $\sigma = 4,975$.

b) Para calcular esta probabilidad, es suficiente con tener en cuenta que $X \sim N(\mu = 43,82; \sigma = 4,975)$. Entonces:

$$P(49,5 < X < 51) = P\left(\frac{49,5 - 43,82}{4,975} < Z < \frac{51 - 43,82}{4,975}\right) = P(1,14 < Z < 1,44) =$$
$$= \Phi(1,44) - \Phi(1,14) = 0,9251 - 0,8729 = 0,0522$$

8. En las últimas elecciones al consejo escolar del centro, Juan obtuvo un 35 % de los votos. Si se eligen 50 alumnos al azar, calcula la probabilidad de que hayan votado a Juan:

a) Más de 20 alumnos de los 50.

b) Entre 25 y 40 alumnos.

La variable X: “número de alumnos, de los 50, que ha votado a Juan” tiene distribución $\text{Bin}(n = 50; p = 0{,}35)$.

La esperanza y la varianza de X son $E[X] = 50 \cdot 0{,}35 = 17{,}5$ y $\text{Var}(X) = 50 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 11{,}375$

Para los cálculos se dan las condiciones para que se pueda aproximar la distribución de X por la de una variable Y con distribución $N(\mu = 17{,}5; \sigma^2 = 11{,}375)$. Entonces:

a) $P(X > 20) \cong P(Y \geq 20{,}5) = P\left(Z \geq \frac{20{,}5 - 17{,}5}{\sqrt{11{,}375}}\right) = P(Z \geq 0{,}89) = 1 - \Phi(0{,}89) = 1 - 0{,}8133 = 0{,}1867$

b) $P(25 \leq X \leq 40) \cong P(24{,}5 \leq Y \leq 40{,}5) = P\left(\frac{24{,}5 - 17{,}5}{\sqrt{11{,}375}} \leq Z \leq \frac{40{,}5 - 17{,}5}{\sqrt{11{,}375}}\right) = P(2{,}08 \leq Z \leq 6{,}82) =$

$= \Phi(6{,}82) - \Phi(2{,}08) = 1 - 0{,}9812 = 0{,}0188$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La variable aleatoria discreta X toma los valores 2, 4, 6 y 8 con probabilidades respectivas c, $c + 1$, $c + 2$ y $c + 3$. El valor de c es:

A. 4 **B.** 1,25 **C.** −1,25 **D.** No existe valor para c.

Si todas las probabilidades son mayores o iguales a cero deben sumar 1, pero si c fuese cualquier positivo o cero la suma sería mayor que 1. Luego la respuesta correcta es la D.

2. La variable aleatoria Y tiene una distribución de probabilidad $\text{Bin}(n, p = 0{,}4)$ y se sabe que su varianza es 2,88. Entonces:

A. $n = 10$ **B.** $n = 12$ **C.** $n = 28$ **D.** $n = 29$

La varianza es $\sigma^2 = \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$. Entonces $2{,}88 = n \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}4) \Rightarrow n = \frac{2{,}88}{0{,}24} = 12$

Luego la respuesta correcta es la B.

3. Si X sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, en el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ se encuentra aproximadamente:

A. El 90 % de los valores de X.

B. El 65 % de los valores de X.

C. El 68 % de los valores de X.

D. Depende de los valores de σ.

Si X es una variable aleatoria que tiene distribución $N(\mu, \sigma)$, la probabilidad del intervalo $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$ con $k > 0$ solo depende del valor de k.

Como $k = 1$ entonces $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = 06826$. Por tanto la respuesta correcta es la C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Fijado *n*, la variabilidad de *X*:

A. Es más grande si *p* está próximo a 1.

B. Es más grande si *p* está próximo a 0.

C. Es máxima si *p* = 0,5.

D. No está influida por el valor de *p*.

La respuesta correcta es la C.

5. El porcentaje de observaciones que queda fuera del intervalo (0, 24) si una variable tiene una distribución normal $X \sim N(\mu = 12, \sigma = 3)$ es aproximadamente:

A. 25 %

B. 75 %

C. 0 %

D. 50 %

$$P(0 < X < 24) = P\left(\frac{0-12}{3} < Z < \frac{24-12}{3}\right) = P(-4 < Z < 4) = P(Z < 4) - P(Z < -4) = 1 - 0 = 1$$

Por tanto, la respuesta correcta es la C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$ e $Y \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1-p)$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. "La distribución de la variable *Y* aproxima la de la variable *X*"

2. "En la distribución de *X*, *n* es grande y *p* no es muy pequeño".

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son independientes una de otra.

Por la teoría vista en el tema la respuesta correcta es la A.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Para calcular la probabilidad $P(-1 < X < 2)$ siendo $X \sim N(\mu, \sigma)$ es necesario conocer:

A. Solo μ.

B. Solo σ.

C. Tanto μ como σ.

D. No hace falta conocer ningún dato**.**

Para transformar una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$ en una variable aleatoria con distribución estándar $Z \sim N(0,1)$ se tipifica. Para ello se utiliza la siguiente expresión:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Por tanto, la respuesta correcta es la C.

PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **El 47 % de las personas de una ciudad son mujeres y el 53 % restante hombres. De entre las mujeres, un 28 % son jóvenes (entre 0 y 25 años), un 38% son adultas (entre 26 y 64 años) y un 34 % son de la tercera edad (65 años o más). De entre los hombres, un 26 % son jóvenes, un 43 % son adultos y un 31 % son de la tercera edad.**

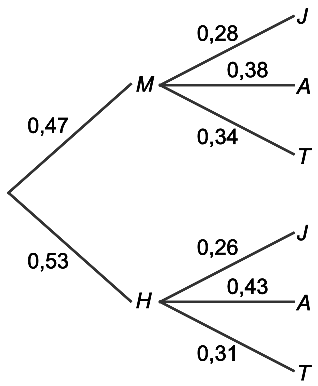
   a) Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de la tercera edad?

   b) Si elegimos una persona de la ciudad al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

   c) Si elegimos una persona de la ciudad al azar de entre las de la tercera edad, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

   d) Si elegimos una mujer de la ciudad al azar de entre las que tienen 26 años o más, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la tercera edad?

   Se definen los sucesos M = "mujer", H = "hombre", J = "persona joven", A = "persona adulta" y T = "persona de la tercera edad"



   a) Por la probabilidad condicionada se tiene:

   $P(M \cap T) = P(M) \cdot P(T|M) = 0{,}47 \cdot 0{,}34 = 0{,}1598$

   b) Por la probabilidad total se tiene:

   $P(T) = P(M) \cdot P(T|M) + P(H) \cdot P(T|H) = 0{,}47 \cdot 0{,}34 + 0{,}53 \cdot 0{,}31 = 0{,}3241$

   c) Por Bayes:

   $$P(M\,|\,T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M) \cdot P(T\,|\,M)}{P(T)} = \frac{0{,}1598}{0{,}3241} = 0{,}4931.$$

   d) Entre las mujeres, el porcentaje de mayores de 26 años es 38 % + 34 %. De ellas, las de la tercera edad son el 34 %. Por tanto:

   $$P(T\,|\,M) = \frac{34}{38+34} = \frac{34}{72} = 0{,}4722$$

2. Juan, Isabel y Elena son tres estudiantes que deciden presentarse a las pruebas de nivel B2 de inglés que organiza la universidad. La probabilidad que tienen de superarla es, respectivamente, de $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ y $\frac{2}{5}$. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Los tres suspenden la prueba.

b) Sólo la supera uno de ellos.

c) Al menos uno de ellos la supera.

Las probabilidades de superar o no superar la prueba son:

Juan: $P(J) = \frac{3}{4} \Rightarrow$ De no superarla: $P(\bar{J}) = \frac{1}{4}$

Isabel: $P(I) = \frac{2}{3} \Rightarrow$ De no superarla: $P(\bar{I}) = \frac{1}{3}$

Elena: $P(E) = \frac{2}{5} \Rightarrow$ De no superarla: $P(\bar{E}) = \frac{3}{5}$

En todos los casos los sucesos (superar o no superar la prueba) son independientes.

a) P(los tres suspenden) = $P(\bar{J} \cap \bar{I} \cap \bar{E}) = P(\bar{J}) \cdot P(\bar{I}) \cdot P(\bar{E}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{20}$.

b) P(solo la supera uno) = [en todos los casos debe aprobar uno y suspender los otros dos] =

$$= P(J \cap \bar{I} \cap \bar{E}) + P(\bar{J} \cap I \cap \bar{E}) + P(\bar{J} \cap \bar{I} \cap E) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{17}{60}$$

c) P(al menos uno la supera) = 1– P(los tres suspenden) = $1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

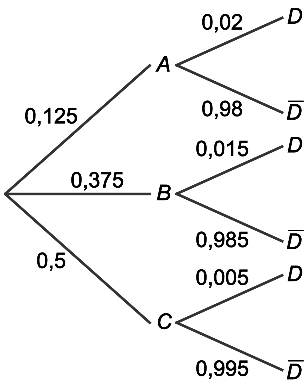
3. Una factoría dispone de tres máquinas para fabricar una misma pieza. La más antigua fábrica 1000 unidades al día, de las que el 2 % son defectuosas. La segunda máquina más antigua, 3000 unidades al día, de las que el 1,5 % son defectuosas. La más moderna fabrica 4000 unidades al día, con el 0,5 % defectuosas. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa?

b) Si una pieza elegida al azar es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina más antigua?

c) Sabiendo que una pieza elegida al azar no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la máquina más moderna?

Si A, B y C designan a las máquinas por orden de antigüedad y D indica el suceso pieza defectuosa:



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B) + P(C) \cdot P(C|D) = 0{,}125 \cdot 0{,}02 + 0{,}375 \cdot 0{,}015 + 0{,}5 \cdot 0{,}005 = 0{,}010625$

b) $P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(A)} = \frac{0{,}125 \cdot 0{,}02}{0{,}010625} = 0{,}2353$

c) $P\left((A \cup B) \mid \bar{D}\right) = \frac{P\left(A \cap \bar{D}\right) + P\left(B \cap \bar{D}\right)}{P\left(\bar{D}\right)} = \frac{0{,}125 \cdot 0{,}98 + 0{,}375 \cdot 0{,}985}{1 - 0{,}010625} = 0{,}4972$

4. Un control de calidad se supera en cuatro de cada cinco aparejos de pesca. Si están sujetos a ese control un total de 225 artículos:

a) ¿Cuántos artículos se espera que superen el control de calidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que superen el control de calidad entre 170 y 187 (incluidos) artículos?

La probabilidad de que un determinado artículo supere el control de calidad es $p = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Se considera la variable Y: "número de artículos no defectuosos entre los 225", $Y \sim \text{Bin}(n = 225,\ p = 0{,}8)$

a) El número esperado de artículos que superen el control de calidad será la media de Y: $\mu = 225 \cdot 0{,}8 = 180$.

b) Y puede aproximarse por la distribución normal $X \sim N\left(\mu = 180,\ \sigma = \sqrt{225 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}\right) = N\left(\mu = 180,\ \sigma = 6\right)$

$$P(170 \le Y \le 187) \simeq P(169{,}5 < X < 187{,}5) = P\left(\frac{169{,}5 - 180}{6} < Z < \frac{187{,}5 - 180}{6}\right) = P(-1{,}75 < Z < 1{,}25) =$$

$$= P(Z < 1{,}25) - P(Z < -1{,}75) = P(Z < 1{,}25) - [1 - P(Z < 1{,}75)] = 0{,}8944 - 1 + 0{,}9599 = 0{,}8543$$

5. Una conocida cadena comercial tiene unas ventas mensuales que siguen una distribución normal de media 45 000 € y desviación típica de 3000 €. Calcula las siguientes probabilidades expresando el resultado en porcentajes:

a) Probabilidad de que las ventas mensuales sean superiores a 50 000 euros.

b) Probabilidad de que las ventas mensuales estén comprendidas entre 42 000 € y 46 000 €.

c) Probabilidad de que las ventas mensuales sean inferiores a 39 000 euros.

d) Sabiendo que la probabilidad de que las ventas mensuales sean superiores a una determinada cantidad es del 1 %, ¿cuál es esa cantidad?

Sea X: "Ventas mensuales", $X \sim N(\mu = 45000,\ \sigma = 3000)$

a) $P(X > 50000) = P\left(\frac{X - 45\,000}{3000} > \frac{50\,000 - 45\,000}{3000}\right) = P(Z > 1{,}67) = 1 - P(Z > 1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

b) $P(42\,000 < X < 46\,000) = P\left(\frac{42\,000 - 45\,000}{3000} < \frac{X - 45\,000}{3000} < \frac{46\,000 - 45\,000}{3000}\right) = P(-1 < Z < 0{,}33) =$

$= P(Z < 0{,}33) - P(Z < -1) = P(Z < 0{,}33) - [1 - P(Z < 1)] = 0{,}6293 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}4706$

c) $P(X < 39\,000) = P\left(\frac{X - 45\,000}{3000} < \frac{39\,000 - 45\,000}{3000}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

d) $P(Z > c) = 0{,}01 \Rightarrow c = 2{,}33 \Rightarrow \frac{X - 45\,000}{3000} = 2{,}33 \Rightarrow X = 45\,000 + 3000 \cdot 2{,}33 = 51990$ €

PRUEBA II SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Decide cuál de las siguientes afirmaciones son correctas:

A. Todas las variaciones con repetición son permutaciones.
B. Todas las variaciones sin repetición son permutaciones.
C. Todas las permutaciones son variaciones con repetición.
D. Todas las permutaciones son variaciones sin repetición.

Las permutaciones son un caso particular de variaciones sin repetición en donde coinciden el número de elementos y los elementos tomados. Solución: D

2. La solución de la ecuación $V_{x,3} = 105P_2$, es:

A. $x = 1$ **B**. $x = 3$ **C**. $x = 5$ **D**. $x = 7$

$V_{x,3} = 105P_2 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 105 \cdot 2! \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 210 = 0 \Rightarrow x = 7$
Solución: D

3. Para afirmar que la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ kx & \text{si} \quad a \le x \le b \\ t & \text{si} \quad x > b \end{cases}$ es una función de densidad, con $k, t, a, b \in \mathbb{R}$ nos dicen:

1. $a = 0$ **2.** $b > 0$

Analiza si la información es suficiente para contestar la cuestión:

A. 1 es suficiente por sí sola, pero 2 no.
B. 2 es suficiente por sí sola, pero 1 no.
C. Son necesarias las dos.
D. Faltan más datos.

t siempre es nulo. Si conocemos *a* y *b* la constante *k* la podemos deducir teniendo en cuenta que el área encerrada por la curva es 1. Por tanto faltan datos para responder.
Solución: D

4. Señala las respuestas correctas. Si $P(A)$ es la probabilidad de obtener al menos una cara cuando lanzamos cuatro caras, entonces:

A. El número de casos favorables es 4.
B. $P(A^c) = \frac{1}{16}$
C. $P(A) > \frac{5}{6}$
D. $P(A) + P(A^c) < 1$

Como $P(A) = \frac{15}{16}$, los únicos casos ciertos son B y C.

5. Una variable X sigue una distribución binomial de parámetros $n = 8$ y $p = 0,2$. La probabilidad de que $X = 6$ es aproximadamente:

A. 0,049 **B**. 0,0011 **C**. 0,0041 **D**. 0,025

$P(X = 6) = \binom{8}{6}(0,2)^6(0,8)^2 = 0,0011$
Solución B

6. Se lanza 100 veces al aire una moneda trucada, en la que la probabilidad de obtener cara es de 0,65. La probabilidad de obtener entre 60 y 70 caras es aproximadamente de:

A. 0,9558 **B**. 0,6939 **C**. 0,7064 **D**. 0,7448

Se considera la variable *Y*: "número de caras en los 100 lanzamientos", $Y \sim \text{Bin}(n = 100, p = 0,65)$

Y puede aproximarse por la distribución normal $X \sim N\left(\mu = 65, \sigma = \sqrt{100 \cdot 0,65 \cdot 0,35}\right) = N(\mu = 65, \ \sigma = 4,77)$

$P(60 \le Y \le 70) \simeq P(59,5 < X < 70,5) = P\left(\frac{59,5-65}{4,77} < Z < \frac{70,5-65}{4,77}\right) = P(-1,15 < Z < 1,15) = 2\Phi(1,15) - 1 = 0,7498$