📘 🧠 Nota rápida: Teorema de Rouché–Frobenius

> Sea un sistema $AX = B$, con:
>
> - "A: matriz de coeficientes"
> - "A^*: matriz ampliada (añadiendo la columna de términos independientes)"

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$:
  ✅ **Compatible determinado** (una única solución)
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n$:
  🔁 **Compatible indeterminado** (infinitas soluciones)
- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$:
  ❌ **Incompatible** (sin solución)

1

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}^{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right.\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$$

$$Rg(A) = 2$$

porque $A^* \subset A$

$$Rg(A^*) = Rg(A) = 2 = n^\circ \text{ incógn.}$$

$$\boxed{SCD}$$

2

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix}}^{A} \left| \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}\right.\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2 = 0 \qquad Rg(A) \neq 2$$

$$|1| = 1 \neq 0 \qquad Rg(A) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4 = 0 \qquad Rg(A^*) \neq 2$$

$$Rg(A^*) = Rg(A) = 1 < n^\circ \text{ incógn.} \qquad \boxed{SCI}$$

3

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}\right.\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-2 = 0 \qquad Rg(A) \neq 2$$

$$|1| = 1 \neq 0 \qquad Rg(A) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2 = 1 \neq 0 \qquad Rg(A^*) = 2$$

$$Rg(A^*) > Rg(A) \qquad \boxed{SI}$$

4

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 0y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right.\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2+2+0+2-2 = 0$$

$$Rg(A) \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0 \qquad Rg(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-2-4+3 = 0 \qquad Rg(A^*) \neq 3$$

$$Rg(A^*) = Rg(A) = 2 < n^\circ \text{inc.}$$

$$\boxed{SCI}$$

5

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ x-y+z=3 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2-2-2+2-2=0$$

$Rg(A) \neq 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-2=-4 \neq 0 \quad Rg(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-2+2+2-2-6=0$$

$Rg(A^*) = Rg(A) = 2 <$ n° inc.

$\boxed{SCI}$

6

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad Rg(A) \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad Rg(A) \neq 2$$

$$|1| \neq 0 \quad Rg(A) = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad Rg(A^*) \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad Rg(A^*) = 2$$

$Rg(A^*) > Rg(A)$ $\boxed{SI}$

7

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x+6y-3z=0 \\ 2x+4y-2z=0 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad Rg(A) \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad |1| \neq 0 \quad Rg(A) = 1$$

$Rg(A^*) = Rg(A) <$ n° inc. $\boxed{SCI}$

8

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2 \neq 0 \quad Rg(A)=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4+4+2-4=-2 \neq 0$$

$Rg(A^*) = 3$

$Rg(A^*) > Rg(A)$ $\boxed{SI}$

9

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad Rg(A) \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad Rg(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4+2+6-4=0$$

$Rg(A^*) = 2$ $\boxed{SCI}$

10

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad Rg(A) = 1$$

$Rg(A^*) = 1$

$\boxed{SCI}$

1

$$\begin{cases} x+y=2 \\ kx+ky=2 \end{cases}$$

$A^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ k & k & 2 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k \end{vmatrix} = k-k=0 \quad Rg(A)=1$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & 2 \end{vmatrix} = 2-2k$

$2-2k=0 \quad k=1$

👉 ¿Para qué valores de k es compatible determinado, indeterminado o incompatible?

Si $k=1 \Rightarrow Rg(A^{*}) = Rg(A) = 1 \quad \boxed{SCI}$

Si $k \neq 1 \Rightarrow Rg(A^{*}) > Rg(A) \quad \boxed{SI}$

2

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ky+z=2 \\ x+y+kz=3 \end{cases}$$

$A^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k & 3 \end{array}\right)$

$\underline{k=1)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad Rg(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+2+\cancel{2}-1-\cancel{2}-6 = -2 \neq 0$

$Rg(A^{*}) = 3 > Rg(A) \quad \boxed{SI}$

👉 ¿Cómo cambia el rango según el valor de k?

(Sugerencia: probar con $k=1$, $k=2$, $k=0$)

3

$$\begin{cases} x+y=1 \\ kx+y=2 \end{cases}$$

👉 Analiza si hay contradicción, dependencia o independencia según k

4

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=k \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$$

👉 Claramente hay ecuaciones dependientes. ¿Qué valor de k rompe la compatibilidad?

5

$$\begin{cases} x+y=1 \\ kx+y=k \end{cases}$$

👉 ¿Hay un valor de k que haga el sistema indeterminado?

Ejercicio 1

Estudia según los valores del parámetro k el número de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ kx+ky=2 \end{cases}$$

Ejercicio 2

Determina, según los valores del parámetro k, cuántas soluciones tiene el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+ky+z=2 \\ x+y+kz=k \end{cases}$$

Ejercicio 3

Para qué valores de k el sistema tiene:

- una única solución,
- infinitas soluciones,
- o ninguna solución:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ kx+y=2 \end{cases}$$

Ejercicio 4

Determina el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada, y clasifica el sistema según el valor de k:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=k \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$$

Ejercicio 5

Estudia para qué valores de k el siguiente sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} x+y+z=k \\ x+2y+z=2k \\ 2x+3y+2z=3k \end{cases}$$
