
LA OLIMPIADA MATEMÁTICA

Sección a cargo de

María Gaspar

LII Olimpiada Matemática Española, Barcelona, 1 y 2 de abril de 2016

por

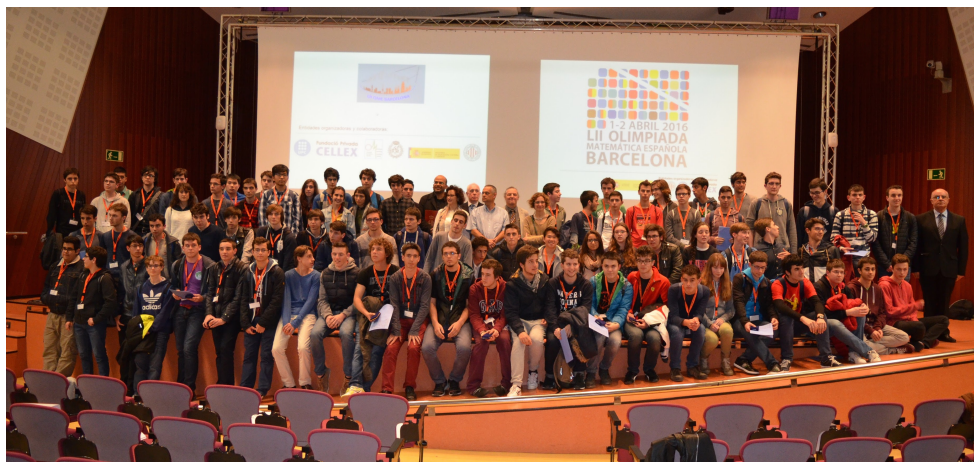
José Luis Díaz Barrero

Durante los días 1 y 2 de abril de 2016 se ha celebrado en Barcelona el Concurso Final de la LII Olimpiada Matemática Española (OME). La organización de esta edición de la OME ha estado a cargo de la Universidad Politécnica de Cataluña (BarcelonaTech) y de la Comisión de Olimpiadas de la RSME, coordinados por el autor de estas líneas y su equipo de colaboradores. Información detallada se encuentra en la web <https://sites.google.com/site/ome52bcn/>.



Logo de la LII OME.

Sin duda, lo más importante han sido los 77 participantes que, procedentes de toda España, han competido para formar parte de los equipos que representarán a nuestro país en la Olimpiada Internacional (IMO) que tendrá lugar en Hong Kong en julio de 2016, y posteriormente en la Olimpiada Iberoamericana que se celebrará en Antofagasta (Chile) en septiembre de 2016. La competición ha consistido en la resolución de seis problemas en dos sesiones, los días 1 y 2 de abril. Un jurado formado por matemáticos antiguos olímpicos, un representante del Ministerio y miembros de la Comisión de Olimpiadas ha sido el encargado de elaborar los criterios de corrección y de asignar las puntuaciones a las soluciones presentadas por los concursantes. Como cada año, todo ha estado coordinado por la Comisión de Olimpiadas de la RSME y especialmente por su Presidenta, María Gaspar. Nuestra sincera felicitación y agradecimiento a todos ellos por el excelente trabajo que desinteresadamente han realizado. También queremos agradecer la presencia de los presidentes de la RSME,



Los participantes y miembros de la mesa en la ceremonia de clausura.

de la SCM y de todas las autoridades que nos han acompañado en las ceremonias de entrega de premios de esta Olimpiada. Quiero dar las gracias a las instituciones públicas y privadas, y de manera muy especial a la Fundación Privada CELLEX que con su apoyo nos han permitido realizar este Concurso Final de la OME en su quincuagésima segunda edición.

Los problemas propuestos han sido:

PRIMERA SESIÓN, VIERNES 1 DE ABRIL DE 2016

PROBLEMA 1. Se tienen dos progresiones de números reales, una aritmética $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y otra geométrica $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no constante. Se cumple que $a_1 = g_1 \neq 0$, $a_2 = g_2$ y $a_{10} = g_3$. Decidir, razonadamente, si, para cada entero positivo p , existe un entero positivo m tal que $g_p = a_m$.

PROBLEMA 2. Sea p un número primo positivo dado. Demostrar que existe un entero α tal que $\alpha(\alpha - 1) + 3$ es divisible por p si y sólo si existe un entero β tal que $\beta(\beta - 1) + 25$ es divisible por p .

PROBLEMA 3. En la circunferencia circunscrita al triángulo ABC , sea A_1 el punto diametralmente opuesto al vértice A . Sea A' el punto en el que la recta AA_1 corta al lado BC . La perpendicular a la recta AA' trazada por A' corta a los lados AB y AC (o a sus prolongaciones) en M y N , respectivamente. Demostrar que los puntos A , M , A_1 y N están en una circunferencia cuyo centro se encuentra en la altura desde A en el triángulo ABC .



Los seis concursantes premiados con medalla de oro en la LII OME. De izquierda a derecha: Martín, Ismael, Jordi, Alberto Acosta, Daniel y Alberto Angurel.

SEGUNDA SESIÓN, SÁBADO 2 DE ABRIL DE 2016

PROBLEMA 4. Sean $m \geq 1$ un entero positivo, a y b enteros positivos distintos mayores estrictamente que m^2 y menores estrictamente que $m^2 + m$. Hallar todos los enteros d que dividen al producto ab y cumplen $m^2 < d < m^2 + m$.

PROBLEMA 5. De entre todas las permutaciones $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, con $n \geq 1$ entero, se consideran las que cumplen que $2(a_1 + a_2 + \dots + a_m)$ es divisible por m para cada $m = 1, 2, \dots, n$. Calcular el número total de estas permutaciones.

PROBLEMA 6. Sea $n \geq 2$ un número entero. Determinar el menor número real positivo γ de modo que, para cualesquiera números reales positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$, y cualesquiera números reales $y_1, y_2, \dots, y_n$, con $0 \leq y_1, y_2, \dots, y_n \leq \frac{1}{2}$, que cumplan $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$, se tiene

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \gamma (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n).$$

GANADORES DE LA LII OME: FASE FINAL

MEDALLA DE ORO

Ismael Morales López (Madrid)
 Martín Ortiz Ramírez (País Vasco)
 Jordi Rodríguez Manso (Cataluña)
 Alberto Acosta Reche (Castilla-La Mancha)
 Daniel Puignau Chacón (Madrid)
 Alberto Angurel Andrés (Aragón)

MEDALLA DE PLATA

Aitor Iribar López (Castilla y León)
Jaime Benabent Guerrero (Andalucía)
Berta García González (Madrid)
Álvaro Arenas González (Madrid)
Martí Oller Riera (Cataluña)
Enrique Naranjo Bejarano (Andalucía)
Rafah Hajjar Muñoz (Comunidad Valenciana)
Miquel Ortega Sánchez-Colomer (Cataluña)
Èric Sierra Garzo (Cataluña)
Jan Olivetti Auladell (Cataluña)
Jaime Fernández Díaz (Madrid)
Alejandro García García (Castilla-La Mancha)

MEDALLA DE BRONCE

Antonio Matas Gil (Andalucía)
Saúl Rodríguez Martín (Madrid)
Roberto Villarejo Fernández (País Vasco)
Iñaki Garrido Pérez (Cataluña)
Daniel Stockwell Mendoza (Andalucía)
Brian Leiva Cerna (Madrid)
Sergio David Cía Luvecce (Navarra)
Victoria Arenas Ramos (Andalucía)
Javier Peñafiel Tomás (Castilla-La Mancha)
Jialin Yang (Madrid)
Jesús Arjona Martínez (Cantabria)
Alejandro Plaza Gallán (Aragón)
Ferrán López Guitart (Valencia)
Boris Carballa Corredoira (Galicia)
Jordi Castellví Foguet (Cataluña)
Javier González Domínguez (Madrid)
Joan Francesc Muntaner González (Baleares)
Alejandro Fernández Jiménez (Castilla y León)

RELACIÓN DE PREMIADOS EN LAS FASES LOCALES

PRIMER PREMIO

Alberto Acosta Reche (Castilla-La Mancha)
Guillermo Alonso Alonso de Linaje (Castilla y León)
Germán Alonso Devesa (Castilla y León)
Alberto Angurel Andrés (Aragón)
Álvaro Arenas González (Madrid)

Victoria Arenas Ramos (Andalucía)
Jesús Arjona Martínez (Cantabria)
Andrés Roger Arnau Notari (Comunidad Valenciana)
Fernando Ballesta Yague (Región de Murcia)
Umaima Bousdar Ahmed (Ceuta)
Lucía Bueno Caravaca (Melilla)
Jordi Castellví Foguet (Cataluña)
Sergio David Cía Luvecce (Navarra)
Sergio Cuesta Martínez (Castilla y León)
Fernando Díaz Porras (Extremadura)
Adrián Doña Mateo (Andalucía)
Alejandro Doval Casas (Galicia)
Berta García González (Madrid)
Iñaki Garrido Pérez (Cataluña)
Pablo Gómez Toribio (Comunidad Valenciana)
Samuel González Castillo (Asturias)
Javier González Domínguez (Madrid)
Álvaro González Hernández (Castilla y León)
Alejandra Hernández de Lara (Andalucía)
Rafah Hajjar Muñoz (Comunidad Valenciana)
Adrián Lillo Pinto (Comunidad Valenciana)
Manuel Llorca Ron (Andalucía)
Ferrán López Guitart (Comunidad Valenciana)
José López Molina (Andalucía)
Javier de Lorenzo-Cáceres González (Canarias)
Lucía de Fang Ma Li (Canarias)
Antonio Matas Gil (Andalucía)
José Luis Miras López (Región de Murcia)
Ismael Morales López (Madrid)
Joan Francesc Muntaner González (Baleares)
Martín Ortiz Ramírez (País Vasco)
José Pérez Cano (Andalucía)
Daniel Puignau Chacón (Madrid)
Jordi Rodríguez Manso (Cataluña)
Daniel Stockwell Mendoza (Andalucía)
Ce Xu Zheng (La Rioja)
Jialin Yang (Madrid)

SEGUNDO PREMIO

David Álvarez Rosa (Navarra)
Jaime Benavent Guerrero (Andalucía)
Sarah Benguigui Benhamú (Melilla)
Héctor Calduch Ortiz de Saracho (Comunidad Valenciana)
Aitana Cano Pérez (Canarias)

Boris Carballa Corredoira (Galicia)
Carlos Carbonell Urtubia (La Rioja)
Laura Castilla Castellano (Andalucía)
Pablo Cendón Palomo (Madrid)
José Céspedes Martínez (Madrid)
Gustavo Roque Collado Romero (Andalucía)
Jaime Fernández Díaz (Madrid)
Alejandro Fernández Jiménez (Castilla y León)
Raquel García Bellés (Comunidad Valenciana)
Marcos García Fierro (Castilla y León)
Alejandro García García (Castilla-La Mancha)
Álvaro Gómez Troitiño (Castilla y León)
Bernat Jordá Carbonell (Baleares)
Daniel Krell Calvo (Andalucía)
Brian Leiva Cerna (Madrid)
Giovanni Lloret Sorribas (Comunidad Valenciana)
Raúl Méndez Horcas (Cataluña)
Ángel Morcillo Gómez (Extremadura)
Félix Moreno Peñarrubia (Comunidad Valenciana)
Miguel Moreno Such (Región de Murcia)
Jan Olivetti Auladell (Cataluña)
Miquel Ortega Sánchez-Colomer (Cataluña)
Alejandro Pérez Suárez (Canarias)
Alejandro Plaza Galán (Aragón)
Saúl Rodríguez Martín (Madrid)
Mateo Rodríguez Polo (Castilla y León)
Guillermo Roldán Caselles (Comunidad Valenciana)
Diego José Sánchez Martín (Madrid)
Jon Ander Santos Granero (Cantabria)
Pablo Saura Bastida (Región de Murcia)
Denisa Mihaela Serban (Andalucía)
Diego Suárez Piedrafita (Asturias)
José María Vázquez Espinosa (Andalucía)
David Villar Martos (Andalucía)
Roberto Villarejo Fernández (País Vasco)
Guillermo Vivó Espinosa (Andalucía)

TERCER PREMIO

Gabriel Alexandru Varga (Andalucía)
Francisco Manuel Almeida López (Madrid)
Miguel Alonso González (La Rioja)
José Álvarez Cuervo (Asturias)
Ana Isabel Bacallado Almandoz (Canarias)
Josep Bataller Umbert (Cataluña)

Ricardo Buitrago Ruiz (Región de Murcia)
Esteban Bullón Tarrasó (Comunidad Valenciana)
Diego Carbonié del Burgo (Madrid)
Alejandro Epelde Blanco (Madrid)
Jia Cheng Gao Yao (Comunidad Valenciana)
Pablo García Arias (Región de Murcia)
Martín Gómez Abejón (Madrid)
Joaquín González López-Cepero (Andalucía)
Alejandro González Pérez (Castilla y León)
Aitor Iribar López (Castilla y León)
Pablo Jiménez Calleja (Canarias)
Clemente Juan Oliver (Comunidad Valenciana)
Jorge Laka Calzada (País Vasco)
Agustín Martín Agüera (Andalucía)
Andrés Miguel Cuartero (Aragón)
Enrique Naranjo Bejarano (Andalucía)
Francisco José Naranjo Campos (Andalucía)
Martí Oller Riera (Cataluña)
Javier Peñafiel Tomás (Castilla-La Mancha)
Cristina Pérez Esteban (Melilla)
José Miguel Pérez Navarrete (Andalucía)
Sara Porras Bedmar (Castilla y León)
Alberto Rius Poveda (Comunidad Valenciana)
José María Rodríguez Reinoso (Andalucía)
Antonio Joaquín Ruiz Alfonso (Comunidad Valenciana)
Daniel Sáez Lozano (Andalucía)
Marc Seguí Coll (Balears)
Diego Sierra Corredera (Madrid)
Èric Sierra Garzo (Cataluña)
Antonio Steimann Martínez-Mora (Madrid)
Jara Trujillo Mulero (Extremadura)
Esther Valbuena Gonzalo (Cantabria)
Santiago Vázquez Sáez (Galicia)
Martín Zozaya Albizu (Navarra)

JOSÉ LUIS DÍAZ BARRERO, CFIS BARCELONA^{TECH}
Correo electrónico: jose.luis.diaz@upc.edu

V Olimpiada Europea Femenina de Matemáticas

por

Francisco Bellot Rosado y Elisa Lorenzo García

En 2012, en Cambridge (UK), tuvo lugar la primera Olimpiada Europea Femenina de Matemáticas (EGMO por sus siglas en inglés), con el objetivo —según su reglamento— de dar a más alumnas una oportunidad de desarrollar sus habilidades matemáticas en un escenario internacional y, de esa forma, descubrir e incentivar a jóvenes europeas matemáticamente dotadas, en todos los países de Europa.

En la EGMO 2012 participaron 16 países europeos. Entre esos países, en la IMO de 2011 había 6 chicas, y para esos mismos países, en la IMO de 2015 hubo 18, y en ninguno de ellos el número de alumnas disminuyó. Además, los resultados obtenidos por dichas alumnas cuando tomaban parte en la IMO mejoraron sensiblemente.

La Comisión de Olimpiadas de la RSME aprobó en su reunión de noviembre de 2015 que España tomase parte por primera vez en esta competición internacional, del 10 al 16 de abril de 2016, en Busteni (Rumanía), y la Junta de Gobierno refrendó este acuerdo, incluido en el plan de trabajo de la Comisión para el año 2016. El equipo de cuatro estudiantes fue seleccionado teniendo en cuenta los resultados de la Fase Local de la 52 OME y los del concurso Barcelona Tech Math Contest, celebrado a finales de febrero, y estaba formado por Berta García González (Madrid), Victoria Arenas Ramos (Córdoba), Lucía de Fang Ma Li (Las Palmas de Gran Canaria) y Lucía Mallo Fernández (Ponferrada, León). Se da la circunstancia de que el pasado año 2015, Berta había formado parte del equipo español en la IMO en Tailandia, y 10 años atrás, Elisa Lorenzo (Jefa Adjunta de la Delegación en Busteni) había participado también en la IMO con el equipo de España. Un plazo de 10 años sin otra participación femenina en nuestro equipo en la Olimpiada Internacional es demasiado largo, de manera que parece claramente necesario animar a las chicas a tomar parte en las Olimpiadas, empezando, naturalmente, por la Olimpiada Matemática Española.

En la EGMO hay analogías y diferencias con el *modus operandi* de la IMO o de la Olimpiada Iberoamericana. Por una parte, los países europeos son invitados a participar en las condiciones habituales de las competiciones internacionales. Aquellos países no europeos que quieren participar en la EGMO deben pagar una tarifa por



Logo de la EGMO 2016.



Los montes Caraiman desde la sede del Jurado.

hacerlo. El país organizador puede invitar a un segundo equipo de su nacionalidad bajo el estatus de país no europeo.

En esta ocasión, en Busteni, al pie de los montes Caraiman, nos reunimos representantes de 39 países, de los que 31 eran europeos, y 147 alumnas participantes, de las que 119 tenían nacionalidad europea.

El Comité selector de Problemas, encabezado por Geoff Smith (Presidente del *IMO Advisory Board*) estaba formado por nueve personas. Este Comité eligió seis problemas para la prueba, con sus correspondientes sustitutos por si alguno de ellos fuera conocido, y los propuso al Jurado Internacional, formado por los Jefes de Delegación y presidido por Mihai Baluna. Los seis problemas propuestos fueron aprobados con algunas modificaciones en los enunciados para evitar excesivos tecnicismos y disminuir el número de preguntas. Las versiones en los idiomas de los 39 países se realizaron con bastante rapidez, habida cuenta de que el criterio del Presidente del Jurado fue que si no hay comentarios u objeciones, quedan automáticamente aprobados. La ceremonia inaugural tuvo lugar el 11 de abril. No hubo, en este caso, una separación rígida entre estudiantes, Jefes Adjuntos y Jefes de Delegación. Se advirtió a los Jefes que se mantuviera estricta confidencialidad sobre los problemas que iban a proponerse, pero después de la ceremonia cada uno pudo reunirse unos momentos con Jefes Adjuntos, estudiantes y guías, hasta que se produjo el regreso paulatino a los hoteles respectivos.

Los seis problemas fueron los siguientes:

MARTES, 12 DE ABRIL DE 2016

PROBLEMA 1. (Propuesto por Holanda)

Sean n un entero positivo impar, y $x_1, \dots, x_n$ números reales no negativos. Demostrar que

$$\min\{x_i^2 + x_{i+1}^2\} \leq \max\{2x_j x_{j+1}\},$$

donde, por una parte, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ y $x_{n+1} = x_1$.

PROBLEMA 2. (Propuesto por Bielorrusia)

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y X la intersección de las diagonales AC y BD . Sean C_1 , D_1 y M los puntos medios de los segmentos CX , DX y CD , respectivamente. Las rectas AD_1 y BC_1 se intersecan en Y , la recta MY interseca a las diagonales AC y BD en dos puntos distintos, que llamaremos respectivamente E y F . Demostrar que la recta XY es tangente a la circunferencia que pasa por E , F y X .

PROBLEMA 3. (Propuesto por México)

Sea m un entero positivo. Se considera un tablero de casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están *relacionadas* si pertenecen ya sea a la misma fila o a la misma columna. Ninguna casilla está *relacionada* con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul, de tal manera que cada casilla está relacionada con, al menos, dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

MIÉRCOLES, 13 DE ABRIL DE 2016

PROBLEMA 4. (Propuesto por Luxemburgo)

Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos X_1 y X_2 . Se considera una circunferencia ω tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1 y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2 . Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se intersecan en un punto que pertenece a ω .

PROBLEMA 5. (Propuesto por Holanda)

Sean k y n enteros tales que $k \geq 2$ y $k \leq n \leq 2k-1$. Se ponen piezas rectangulares, cada una de tamaño $1 \times k$ o $k \times 1$, en un tablero de $n \times n$ casillas cuadradas, de forma que cada pieza cubra exactamente k casillas del tablero y que no haya dos piezas superpuestas. Se hace esto hasta que no se puedan colocar más piezas. Para cada n y k que cumplan las condiciones anteriores, determinar el mínimo número de piezas que puede contener dicho tablero.

PROBLEMA 6. (Propuesto por Holanda)

Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que n^4 tiene un divisor en el conjunto $\{n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n\}$. Demostrar que hay infinitos elementos en S de cada una de las formas $7m$, $7m + 1$, $7m + 2$, $7m + 5$ y $7m + 6$, pero S no contiene elementos de la forma $7m + 3$ ni $7m + 4$, siendo m un entero.

Cada día de prueba el Jurado Internacional respondió a las preguntas de los estudiantes durante la primera media hora, tras lo cual se aprobaron los criterios de corrección de los tres problemas del día.

La norma 2.7 del Reglamento de la EGMO dice textualmente que los Jefes de Delegación y sus Adjuntos actúan *in loco parentis* con respecto a los estudiantes. Ninguno de los dos firmantes de este artículo nos imaginábamos el 12 de abril lo que puede significar realmente esto, pero lo aprendimos *magnis itineribus* la noche



EL equipo español en la V EGMO. De izquierda a derecha: Elisa, Lucía, Berta, Lucía de Fang, Victoria, Francisco y, detrás, nuestro guía, Gabriel Visan.

del día 12 y todo el día 13. En efecto, Berta García sufrió un ataque de apendicitis del que fue operada con éxito en las primeras horas de la tarde del día 13, después de haber realizado la prueba. La atención médica en Busteni y en el hospital de Sinaia (a 10 km de Busteni) fue excelente, y los padres de Berta llegaron a Bucarest la noche del día 13 y a Busteni al día siguiente, regresando con ella a Madrid el domingo 17, un día más tarde de lo previsto.

Tras la coordinación, el día 13 se reunió por la noche el Jurado con objeto de determinar los «cortes» de las medallas. Se guardó un minuto de silencio en memoria de Dan Schwarz, gran valedor en Rumanía de esta Olimpiada, así como del Concurso Canguro Matemático y otros concursos, tan numerosos en ese país. Se aprueba por unanimidad de los Jefes de Delegación europeos que se concedan 62 medallas (a las participantes europeas): 11 de oro, 23 de plata y 28 de bronce. Solamente después de tomada esta decisión se hacen públicas las puntuaciones de oro, plata y bronce (en este caso, para todas las participantes): oro, desde 27 puntos; plata, desde 17; y bronce, desde 11. De esta manera se concedieron 16 medallas de oro, 30 de plata y 35 de bronce. La estudiante rusa Maria Dmitrieva logró 42 puntos (puntuación perfecta en todos los problemas). Los países no europeos fueron Ecuador, India, Israel, Japón, México, Arabia Saudí y Estados Unidos.

Comunicamos que Berta ha conseguido una de las medallas de plata, que en sus circunstancias podría considerarse de platino; los médicos la autorizaron a asistir a la ceremonia de entrega de premios, el día 15, de 17 h a 19 h, para luego regresar al hospital.

La próxima edición de la EGMO tendrá lugar en Zurich (Suiza), del 6 al 12 de abril de 2017.

De nuestras cuatro estudiantes, solamente Lucía Mallo está en condiciones de repetir EGMO el año próximo (está ahora en 1.º de Bachillerato); las tres restantes cursan 2.º de Bachillerato y, por lo tanto, ingresarán en la Universidad para el curso próximo.

Una primera participación en una competición internacional siempre es difícil de evaluar; todos los resultados son casi siempre mejorables, pero en nuestra opinión hay que continuar participando con el máximo esfuerzo, como ha hecho nuestro equipo.

FRANCISCO BELLOT ROSADO, MIEMBRO DE LA JUNTA DE GOBIERNO DE LA RSME Y DE SU COMISIÓN DE OLIMPIADAS

Correo electrónico: franciscobellot@gmail.com

ELISA LORENZO GARCÍA, UNIVERSITEIT LEIDEN

Correo electrónico: e.lorenzo.garcia@math.leidenuniv.nl